دانشکده ریاضی و کامپیوتر

بخش ریاضی محض

رساله برای دریافت درجه دکتری

رشتهٔ ریاضی محض

فورسینگ به کمک زیرساختارهای مقدماتی

مؤلف:

روح‌الله حسینی‌نوه

استاد راهنمای اول:

دکتر اسفندیار اسلامی

استاد راهنمای دوم:

دکتر محمد گلشنی

۱۴۰۳/۰۴/۳۰

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر

بخش ریاضی محض

این رساله با عنوان فورسینگ به کمک زیرساختارهای مقدماتی توسط آقای روح‌الله حسینی‌نوه دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض گرایش جبر با شماره دانشجویی ۹۸۶۳۲۰۰۱ تدوین شده است و در تاریخ .... با درجه .... و نمره .... مورد پذیرش هیئت محترم داوران قرار گرفت.

این پایان‌نامه هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره دکتری شناخته نمی‌شود.

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	نام محل خدمت	امضاء
استاد راهنمای اول	دکتر اسفندیار اسلامی	استاد	دانشگاه شهید باهنر کرمان	
استاد راهنمای دوم	دکتر محمد گلشنی	دانشیار	پژوهشگاه دانش‌های بنیادی	
داور اول	دکتر سید ناصر حسینی	استاد	دانشگاه شهید باهنر کرمان	
داور دوم	دکتر سید شاهین موسوی	دانشیار	دانشگاه شهید باهنر کرمان	
داور خارجی	دکتر مسعود پورمهدیان	استاد	دانشگاه امیرکبیر تهران	

نماینده تحصیلات تکمیلی:

نام و نام خانوادگی

امضاء:

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده:

نام و نام خانوادگی

امضاء:

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

با استعانت از خدای سبحان و اعتقاد راسخ به این که عالم محضر خداست و او همواره ناظر بر اعمال ماست و به منظور انجام شایسته‌ی پژوهش‌های اصیل، تولید دانش جدید و بهسازی زندگانی بشر، ما دانشجویان و اعضای هیأت علمی دانشگاه‌ها و پژوهشگاه‌های کشور:

- ☐ تمام تلاش خود را برای کشف حقیقت و فقط حقیقت به کار خواهیم بست و از هر گونه جعل و تحریف در فعالیت‌های علمی پرهیز می‌کنیم.
- ☐ حقوق پژوهشگران، پژوهیدگان (انسان، حیوان، نبات و اشیاء)، سازمان‌ها و سایر صاحبان حق را به رسمیت می‌شناسیم و در حفظ آن می‌کوشیم.
- ☐ به مالکیت مادی و معنوی آثار پژوهشی ارج می‌نهیم، برای انجام پژوهشی اصیل اهتمام ورزیده و از سرقت علمی و ارجاع نامناسب اجتناب می‌کنیم.
- ☐ ضمن پایبندی به انصاف و اجتناب از هر گونه تبعیض و تعصب در کلیه فعالیت‌های پژوهشی، رهیافتی نقادانه اتخاذ خواهیم کرد.
- ☐ ضمن امانت داری، از منابع و امکانات اقتصادی، انسانی و فنی موجود، استفاده بهره‌ورانه خواهیم کرد.
- ☐ از انتشار غیراخلاقی نتایج پژوهش، نظیر انتشار موازی، همپوشان و چندگانه (تکه‌ای) پرهیز می‌کنیم.
- ☐ اصل محرمانه بودن و رازداری را محور تمام فعالیت‌های پژوهشی خود قرار می‌دهیم.
- ☐ در همه فعالیت‌های پژوهشی به منافع ملی توجه کرده و برای تحقق آن می‌کوشیم.
- ☐ خویش را ملزم به رعایت کلیه هنجارهای علمی رشته خود، قوانین و مقررات، سیاست‌های حرفه‌ای، سازمانی، دولتی و راهبردهای ملی در همه مراحل پژوهش می‌دانیم.
- ☐ رعایت اصول اخلاق در پژوهش را اقدامی فرهنگی می‌دانیم و به منظور بالندگی این فرهنگ، به ترویج و اشاعه آن در جامعه اهتمام می‌ورزیم.

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تعهدنامه

اینجانب روح‌الله حسینی‌نوه به شماره دانشجویی ۹۸۶۳۲۰۰۱ دانشجوی مقطع دکتری رشته ریاضی محض دانشکدۀ ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان، مؤلف پایان‌نامه با عنوان ”فورسینگ به کمک زیرساختارهای مقدماتی“ تحت راهنمایی دکتر اسفندیار اسلامی و دکتر محمد گلشنی تأیید می‌کنم که این رساله نتیجه پژوهش اینجانب می باشد و در عین حال که موضوع آن تکراری نیست، در صورت استفاده از منابع دیگران، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن درج شده است. همچنین موارد زیر را نیز تعهد می‌کنم:

۱- برای انتشار تمام یا قسمتی از داده‌ها یا دستاوردهای رساله خود در مجامع و رسانه‌های علمی اعم از همایش‌ها و مجلات داخلی و خارجی به صورت مقاله، کتاب، ثبت اختراع و .... به صورت مکتوب یا غیرمکتوب، با کسب مجوز از دانشگاه شهید باهنر کرمان و استاد(اساتید) راهنما اقدام نمایم.

۲- از درج اسامی افراد خارج از کمیته رساله در جمع نویسندگان مقاله‌های مستخرج از رساله، بدون مجوز استاد(اساتید) راهنما اجتناب نمایم و اسامی افراد کمیته رساله را در جمع نویسندگان مقاله درج نمایم.

۳- از درج نشانی یا وابستگی کاری (affiliation) نویسندگان سازمان‌های دیگر (غیر از دانشگاه شهید باهنر کرمان [1]) در مقاله‌های مستخرج از رساله بدون تأیید استاد(اساتید) راهنما اجتناب نمایم.

۴- کلیه ضوابط و اصول اخلاقی مربوط به استفاده از موجودات زنده یا بافتهای آنها را برای انجام رساله رعایت نمایم.

۵- در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه شهید باهنر کرمان از درجه اعتبار ساقط و اینجانب هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت. کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر (مقالات مستخرج، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) مطابق با آیین‌نامه مالکیت فکری، متعلق به دانشگاه شهید باهنر کرمان است و بدون اخذ اجازه کتبی از دانشگاه قابل واگذاری به شخص ثالث نیست. همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد. چنانچه مبادرت به عملی خلاف این تعهدنامه محرز گردد، دانشگاه شهید باهنر کرمان در هر زمان و به هر نحو مقتضی حق هرگونه اقدام قانونی را در استیفای حقوق خود دارد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: روح‌الله حسینی‌نوه امضا و تاریخ: ۱۴۰۳/۴/۳۰

---

[1] Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

بخش ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

تقدیم به:

سورنا

اولینِ وطن‌ها و آخرینِ تبعیدگاه‌ها

تشکر و قدردانی:

متشکرم، از خانواده، دوستان و همه کسانی که مرا به راهی که بهترین راه‌هاست هدایت نمودند و در این مسیر، لحظه‌ای دست از همراهی‌ام برنداشتند.

متشکرم، از دکتر اسفندیار اسلامی که نه تنها مرا به دریای علمشان راه نمودند بلکه با کلام نافذشان پنجره‌های جدیدی رو به زندگی برایم گشودند و با صبر و بردباری بی‌مثالشان راهنمای مسیرم بودند.

متشکرم، از دکتر محمد گلشنی که هیچ حمایت و کمکی را از من دریغ نکردند و پاسخ همه نادانی‌هایم را با صبوری دادند.

متشکرم، از رحمان، ساندرا، یاکوب و همه دوستانی که بی هیچ چشم‌داشتی مسیرم را به سمت خوبی‌ها و زیبایی‌ها هموار می‌کردند.

متشکرم، از آقایان دکتر پورمهدیان، دکتر حسینی و دکتر موسوی برای داوری این رساله و همچنین نظرات و اصلاحات پیشنهادی ایشان که کمک شایانی در جهت بهبود آن بود.

چکیده:

در این رساله، با استفاده از فورسینگ به کمک زیرساختارهای مقدماتی، ابتدا برای پاسخ دادن به سوالی از گیتیک، فورسینگی معرفی می‌کنیم که کاردینال‌ها و GCH را حفظ، و زیرمجموعه‌های فراژنریک ω_2 الحاق می‌کند. سپس تعمیمی از فورسینگ آبراهام معرفی می‌کنیم که زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در ω_1 الحاق می‌کند، سره است و ωـسره نیست. در ادامه برای ارائهٔ اثباتی جدید برای قضیه‌ای از شلاه، فورسینگی معرفی می‌کنیم که زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران آبراهام در ω_1 الحاق می‌کند و برای هر اردینال تجزیه‌ناپذیر α، $<\alpha$ـسره است اما αـسره نیست.

واژگان کلیدی: فورسینگ به کمک شروط جانبی، زیرساختارهای مقدماتی، شروط جانبی از دو نوع.

فهرست مطالب

فهرست علایم اختصاری

فصل اول:

مقدمه

فورسینگ، برای اثبات استقلال اصل انتخاب[1] (AC) از ZF و فرضیهٔ پیوستار[2] (CH) از ZFC، توسط کوهن[3] در ۱۹۶۳ معرفی شد [۷]. بلافاصله مشخص شد فورسینگ، تکنیکی بسیار انعطاف‌پذیر با کاربرد زیاد برای گسترش ساختارهای نظریهٔ مجموعه‌ها است و ریاضی‌دانانی با زمینه‌های تخصصی منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها، و برخی در سایر زمینه‌ها، شروع به حل مسائل به کمک این روش کردند [۱۵،۸]. یکی از درخشان‌ترین آن‌ها، مقاله سولوی[4] و تننبام[5] در اوایل سال ۱۹۶۵ بود، که سازگاری فرضیهٔ سوسلین[6] (SH) را روشن می‌کرد. سوالی کلاسیک از سال ۱۹۲۰، با استفادهٔ پیشگامانه از فورسینگ مکرر،[7] که منجر به "کشتن درختان سوسلین" در ساختارهای گسترش‌یافته می‌شد، در [۲۸] حل شد.

کوهن با ساختار متعدی و شمارای M از ZF یا ZFC، و مجموعهٔ $\mathbb{P} \in M$، شامل اشیائی که آن‌ها را شرط‌های[8] فورسینگ می‌نامید شروع کرده و با الحاق فیلتر ژنریک[9] $G \subseteq \mathbb{P}$، که وجود آن به راحتی قابل اثبات بود، ساختار مینیمال گسترش‌یافتهٔ $M[G]$ را تولید می‌نمود که همچنان ساختار نظریهٔ مجموعه‌ها بود، اردینال‌های M را تغییر نمی‌داد و خواص مورد نظر او را نیز داشت. کوهن، ابتدا زیرمجموعه‌ای از M، شامل $\mathbb{P}$ــ ترم‌ها را در نظر گرفته و سپس با ارائهٔ روشی برای تعبیر آن‌ها با فیلتر ژنریک G، ساختار $M[G]$ را می‌سازد. او ضمنا با معرفی رابطهٔ فورسینگ ($\Vdash$) و اثبات تعریف‌پذیری[10] آن در M، درستی در $M[G]$ را به درستی در M کاهش می‌دهد؛ یعنی با استفاده از زبان فورسینگ، گزاره‌های $M[G]$ را به گزاره‌های قابل درک در M تبدیل می‌کند. در واقع در روش کوهن، هر گزارهٔ $\varphi(v_۱, \ldots, v_n)$ با مؤلفه‌هایی مانند $\underset{\sim}{x}_۱[G], \ldots, \underset{\sim}{x}_n[G] \in M[G]$، که $\mathbb{P}$ــ ترم‌های تعبیرشده با G هستند، توسط عضوی از G اجبار[11] می‌شود:

$$M[G] \models \varphi(\underset{\sim}{x}_۱[G], \ldots, \underset{\sim}{x}_n[G]) \iff \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\underset{\sim}{x}_۱, \ldots, \underset{\sim}{x}_n)).$$

[1] Axiom of Choice
[2] Continuum Hypothesis
[3] Paul J. Cohen
[4] Robert M. Solovay
[5] Stanley Tennenbaum
[6] Suslin's Hypothesis
[7] Iterated Forcing
[8] Conditions
[9] Generic Filter
[10] Definability
[11] Force

مشکل جزئی رویکرد کوهن این است که وجود ساختار متعدی شمارا الزامی نیست، زیرا بر اساس قضیهٔ ناتمامیت دوم[1] گودل [۱۰]، وجود چنین ساختاری قابل اثبات نیست. لذا چندین ویژگی از استدلال‌های کوهن، دوباره فرمول‌بندی شدند، سازماندهی شدند و تعمیم یافتند، اما محور رویکرد او که تعریف‌پذیری و ژنریک بودن[2] است، باقی ماند. رویکرد مدرن به فورسینگ این است که فرض کنیم ساختار زمینهٔ V وجود دارد به طوری که می‌تواند گسترش ژنریک داشته باشد. در این رویکرد، فرض می‌شود هر مجموعهٔ داده شده از شرط‌های فورسینگ، فیلتر ژنریک دارد. امروزه معمولاً فورسینگ به صورت زیر معرفی می‌شود:

فرض کنید V ساختاری از نظریهٔ مجموعه‌ها است. هر سه‌تایی $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}} \rangle \in V$ که $\leq_{\mathbb{P}}$ ترتیب جزئی روی $\mathbb{P}$، و $1_{\mathbb{P}}$ بزرگترین عنصر $\mathbb{P}$ باشد، مفهوم فورسینگ[3] است.

معولا مفهوم فورسینگ را به اختصار، فورسینگ می‌گویند. اعضای فورسینگ که به آن‌ها شرط می‌گوییم، تقریب‌هایی عموما متناهی از اشیائی با خواص موردنظر هستند. برای شرط‌های p و q از فورسینگ $\mathbb{P}$، گوییم q شرطی قوی‌تر از p است، یا گسترشی[4] از p است، یا دارای اطلاعات بیشتری نسبت به p است، هرگاه $q \leq_{\mathbb{P}} p$. در واقع هر گسترش شرط p تقریب بهتر و دقیق‌تری نسبت به p از شی ژنریک است. با این توصیف، برای هر فورسینگ $\mathbb{P}$، $1_{\mathbb{P}}$ که معمولاً مجموعه تهی است، ضعیف‌ترین شرط $\mathbb{P}$ است و دارای اطلاعات کمتری نسبت به هر شرط دیگر است.

مجموعهٔ $G \subseteq \mathbb{P}$ را ژنریک گوییم، هرگاه G فیلتری باشد که همه زیرمجموعه‌های چگال باز[5] $\mathbb{P}$ که در V هستند، را قطع کند [۱۳]. این فیلتر متعلق به V نیست، پس ساختار تولید شده از الحاق آن به V، ساختاری متمایز از V خواهد بود. ممکن است الحاق G به ساختار V، همزمان که خواص دلخواه در $V[G]$ تایید می‌کند، برخی تغییرات مهم و غیرقابل کنترل که مطلوب نیستند نیز، در $V[G]$ ایجاد کند. مهمترین این تغییرات می‌تواند فروریزی[6] کاردینال‌ها یا نقض فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافته[7] (GCH) باشد. در واقع ممکن است الحاق G، همانند در [۵،۶]، موجب الحاق زیرمجموعه‌های جدید یک اردینال، به ساختار بشود، یا همانند در [۲۹]، تابع جدیدی

[1] Second Incompleteness Theorem

[2] Genericitiy

[3] Forcing Notion

[4] Extension

[5] Dense Open

[6] Collapse

[7] Generalized Continuum Hypothesis

را در $V[G]$ تعریف‌پذیر کند، که دوسویی بین کاردینالی از V، و اردینالی کوچکتر از خودش است.

اگر θ کاردینال V باشد، گوییم فورسینگ با $\mathbb{P}$ کاردینال θ را حفظ می‌کند، یا به طور مختصر، $\mathbb{P}$ کاردینال θ را حفظ می‌کند، هرگاه برای هر فیلتر ژنریک $G \subseteq \mathbb{P}$، اردینال θ همچنان در $V[G]$ کاردینال باشد. تاکنون ویژگی‌های مختلفی در مورد فورسینگ‌ها بررسی شده‌اند تا کلاس‌هایی از فورسینگ‌ها را مشخص کنند که کاردینال‌های خاصی را حفظ می‌کنند. تحقیقات در این زمینه، توجه ویژه به کلاس فورسینگ‌هایی که $\aleph_1$ را حفظ می‌کنند، نشان داده‌اند.

کوهن در [۷] نشان می‌دهد اگر فورسینگ $\theta-$c.c. باشد، یعنی کاردینالیتهٔ هر پادزنجیر ماکسیمال[1] آن کمتر از θ باشد، آن‌گاه هر $\kappa \geq \theta$، در $V[G]$ کاردینال است اگر و تنها اگر در V کاردینال باشد. سولوی نیز در [۲۷]، کلاس فورسینگ‌های θــ بسته[2] را معرفی می‌کند، که همهٔ کاردینال‌های کوچک‌تر یا مساوی θ را حفظ می‌کند. $\mathbb{P}$ را θــ بسته گوییم، هرگاه برای هر $\beta < \theta$ و هر دنبالهٔ نزولی $\langle p_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ از شرط‌های $\mathbb{P}$، $q \in \mathbb{P}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر α، $q \leq p_\alpha$. باومگارتنر[3] نیز، با معرفی فورسینگ‌های Axiom A در [۴]، کلاسی از فورسینگ‌ها را معرفی کرد که $\aleph_1$ را حفظ می‌کنند و شامل فورسینگ‌های $\aleph_1-$c.c. و $\aleph_1$ــ بسته است.

در مهمترین این تحقیقات، شلاه[4] در ۱۹۸۰ با معرفی مفهوم فورسینگ سره[5] در [۲۵]، کلاسی از فورسینگ‌ها را مشخص کرد که $\aleph_1$ را حفظ می‌کنند و شامل فورسینگ‌های Axiom A است. او اولین بار مفهوم سره بودن فورسینگ را حین تحقیقات اولیه‌اش در زمینهٔ فورسینگ‌های مکرر با حمایت شمارا،[6] برای حفظ $\aleph_1$ معرفی کرد و در ادامه به بسط و گسترش آن پرداخت. فورسینگ $\mathbb{P}$ را سره گوییم، هرگاه زیرمجموعه‌های پایای[7] $[\theta]^{\aleph_0}$ را برای هر کاردینال ناشمارای θ حفظ کند. $[\theta]^{\aleph_0}$، مجموعهٔ همه زیرمجموعه‌های θ است که کاردینالیتهٔ $\aleph_0$ دارند. شلاه نشان داد هر فورسینگی که این زیرمجموعه‌های پایا را حفظ کند، $\aleph_1$ را نیز حفظ می‌کند. او ثابت کرد هرگاه G فیلتر ژنریک فورسینگ سره باشد، هر مجموعهٔ شمارا از اردینال‌های $V[G]$، زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای شمارا از اردینال‌ها است که به V تعلق دارد. این خصوصیت با ناشمارا نبودن $\aleph_1^{V[G]}$ در تناقض است. او همچنین

[1]Maximal Antichain

[2]θ-closed

[3]James E. Baumgartner

[4]Saharon Shelah

[5]Proper Forcing

[6]Countable Support

[7]Stationary

در [۲۶] ثابت کرده است تکرار با حمایت شمارای فورسینگ‌های سره، سره است.

در حالی که راه‌های متعددی برای اثبات $\aleph_1-$c.c. بودن فورسینگ‌ها وجود دارد و علی‌رغم سادگی تعریف فورسینگ سره، تعداد کمی تکنیک برای اثبات سره بودن فورسینگ در دسترس است که عموما پیچیده هستند. معمول‌ترین روش برای اثبات سره بودن فورسینگ، استفاده از قضیهٔ معادل‌سازی است که شلاه در [۲۶] آورده است. او در این تکنیک، با استفاده از زیرساختارهای مقدماتی[۱] شمارای H_θ، که هرگاه θ یک کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، ساختاری از ZFC است، شرط‌های ژنریک را معرفی کرده و به کمک آن‌ها سره بودن فورسینگ را اثبات می‌کند.

تودورچویچ[۲] در ۱۹۸۴ فورسینگی در [۲۹] معرفی کرد که هر شرط آن، $\in$ـ زنجیری[۳] متناهی از زیرساختارهای مقدماتی و شمارای ساختاری از کاردینالیتهٔ کاردینالی منتظم[۴] و به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. او نشان داد این فورسینگ، سره است و می‌توان از شرط‌های آن به عنوان شرط جانبی[۵] در برخی فورسینگ‌ها که سره بودن آن‌ها را به راحتی اثبات نمی‌شود، استفاده کرد و سره بودن آن‌ها را نشان داد. در حقیقت با استفاده از این تکنیک، فورسینگ جدیدی ساخته می‌شود که هر شرط آن زوج مرتبی شامل بخش کارکن[۶] و شرط جانبی است. وظیفهٔ بخش کارکن تقریب زدن شی ژنریک است و معمولاً فورسینگی شامل فقط همین شرط‌ها، به تنهایی می‌تواند همان شی ژنریک را تعیین کند. اما برای این فورسینگ با این شرط‌ها، هرگز اثبات ساده‌ای برای سره بودن وجود نخواهد داشت. در این حالت است که اهمیت شرط‌های جانبی مشخص می‌شود. شرط‌های جانبی به خاطر ماهیتشان که دنباله‌های زیرساختارهای مقدماتی شمارا است، به سادگی امکان اثبات سره بودن را فراهم می‌کنند و این مهم را بدون تغییر شی ژنریک مورد نظر، انجام می‌دهند. بخش بسیار تعیین‌کننده و مهم، برقراری ارتباط بین این دو قسمت است. به دلیل وجود شرط‌های جانبی و این ارتباط، ادغام[۷] شرط‌ها ساده‌تر می‌شود اما پیچیدگی شرط‌ها افزایش می‌یابد. اکنون دیگر، شرط‌ها شامل مجموعه‌های متناهی نیستند، و به عنوان مثال، شانسی برای اثبات $\aleph_1-$c.c. بودن باقی نمی‌ماند. اما در عین حال برای شرط‌های لازم می‌توان خاصیت ژنریک بودن روی

[1] Elementary Substructure

[2] Stevo Todorčević

[3] $\in$-chain

[4] Regular Cardinal

[5] Side Condition

[6] Worker part

[7] Amalgamation

ساختارهای مورد نظر را اثبات کرد، و بنابراین فورسینگ، سره خواهد بود. [۱۷، ۲۹، ۳۰] را ببینید.

در ۲۰۱۷، تودورچویچ و کوزلژویچ[1] در [۲۰] تعمیمی از فورسینگ با شروط جانبی تودورچویچ معرفی کردند که در آن گرچه اجزای تشکیل‌دهنده هر شرط، مانند قبل، زیرساختارهای مقدماتی شمارای H_θ برای کاردینال داده شده θ بودند، اما شرطها دیگر به صورت دنباله‌های متناهی در نظر گرفته نمی‌شدند. شروط این فورسینگ می‌توانستند شامل زیرساختارهای مقدماتی یکریخت باشند، و چون هیچ دو زیرساختار مقدماتی یکریخت نمی‌توانند عضوی از دیگری باشند، شرطها نمی‌توانند $\in$ـ زنجیر باشند. اما حالتی از صعودی بودن، همچنان نقش مهمی ایفا می‌کند. این شرطها را می‌توان به صورت ماتریس‌هایی(نه لزوماً کامل) متناهی تصور کرد که در آن، زیرساختارهای مقدماتی شمارای یکریخت، ردیف‌های ماتریس را تشکیل می‌دهند و هر درایهٔ هر ردیف پایینی، باید الزاماً متعلق به درایه‌ای از ردیف بالاتر باشد. فورسینگ شامل ماتریس‌های زیرساختارهای مقدماتی شمارا، سره است و CH را حفظ می‌کند.

بیست سال پس از معرفی فورسینگ به وسیله شرطهای جانبی،[2] فریدمن[3] در [۹] و میشل[4] در [۲۱]، مستقل از یکدیگر با معرفی فورسینگ‌هایی که منجر به الحاق مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران[5] در ω_2 می‌شد، اولین گام‌ها را برای استفاده از تکنیکی برداشتند که به وسیلهٔ شرطهای متناهی،[6] شی ژنریک[7] از کاردینالیتهٔ $\theta > \aleph_1$ الحاق می‌کند، و $\aleph_1$ و θ را حفظ می‌کند. آنها برای حفظ هر دو کاردینال، از زیرساختارهای مقدماتی شمارا به عنوان شروط جانبی استفاده کردند اما این شرطهای جانبی نه به صورت دنباله‌های صعودی، بلکه مجموعه‌هایی از زیرساختارهای مقدماتی شمارا بودند که برخی خواص برای آنها در نظر گرفته شده بود.

کارهای فریدمن و میشل، در ادامهٔ مسیر تحقیقاتی انجام گرفت که سعی در الحاق مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در کاردینال‌های دلخواه داشتند. قبل از آنها، در ۱۹۷۶ باومگارتنر و همکاران[8] در [۳] نشان دادند مفهوم مجموعهٔ پایا مفهوم مطلق نیست. به بیان دقیق‌تر، آنها با الحاق مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_1، ثابت کردند مجموعهٔ پایای

[1] B. Kuzeljevic
[2] Forcing With Side Conditions
[3] Sy-David Friedman
[4] William J. Mitchell
[5] Closed Unbounded Set
[6] Finite Conditions
[7] Generic Object
[8] Baumgartner, Harrington, and Kleinberg

$S \subseteq \omega_۱$ می‌تواند در گسترش ژنریک که به ویژه $\aleph_۱$ را حفظ می‌کند، ناپایا[1] باشد. همچنین، آبراهام[2] و شلاه در [۱] برای هر کاردینال دلخواه κ مفهوم فورسینگی معرفی کردند که با شرطهایی از کاردینالیتهٔ کمتر از κ، مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در κ الحاق می‌کرد، بدون اینکه مجموعهٔ جدیدی از کاردینالیتهٔ کمتر از κ الحاق کند.

سرانجام در ۲۰۱۴، نیمن در [۲۳] توانست شرطهای جانبی میشل و فریدمن را ساده‌تر کند و تکنیکی کاملا کاربردی برای فورسینگ روی $\omega_۲$ با شرطهای متناهی ارائه دهد که دیگر فقط شامل زیرساختارهای مقدماتی شمارا نبودند. هر شرط فورسینگ نیمن، دنباله‌ای صعودی و متناهی از زیرساختارهای مقدماتی از دو نوع شمارا و متعدی ساختار K هستند، که به اندازهٔ کافی از ZFC را برآورده می‌کند. این شرطها با فراهم کردن شرایطی برای اثبات سره بودن فورسینگ برای دو کاردینال، می‌توانند $\aleph_۱$ و کاردینالی بزرگتر، که در گسترش ژنریک تبدیل به $\aleph_۲$ می‌شود را حفظ کنند، و همچنین اثباتی برای سازگاری اصل فورسینگ سره[3] (PFA) ارائه کنند، که قبل از آن توسط شلاه به وسیلهٔ شرطهایی با حمایت شمارا انجام شده بود.

در فصل ۲، ابتدا قضایا و تعاریف مقدماتی لازم را در بخش ۲−۱ می‌آوریم، و سپس در بخش ۲−۲ به معرفی فورسینگ و بعضی قضایا و لم‌های مهم و کاربردی مربوط به آن می‌پردازیم. در همین بخش همچنین برخی خواص عمومی‌تر مفاهیم فورسینگ را نیز یادآوری و بررسی می‌کنیم. در آخر، بخش را با بررسی دو فورسینگ شناخته شده و خواص آن‌ها به پایان می‌بریم. از این دو فورسینگ، در فصل ۳ استفاده خواهد شد. در بخش ۲−۳، تعریف فورسینگ سره و به طور قوی سره[4]، آورده شده و معادل‌سازی شناخته شده آن‌ها با استفاده از شرطهای ژنریک برای زیرساختارهای مقدماتی، مورد بررسی دقیق قرار می‌گیرد. تعاریف، قضایا و لم‌های این بخش، به دفعات در فصل ۳ و ۴ مورد استفاده و ارجاع قرار می‌گیرد. در آخر، در بخش ۲−۴، دو فورسینگ تودورچویچ با شرطهای شامل زیرساختارهای مقدماتی شمارا معرفی شده و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. قضایا و لم‌های مطرح شده در این بخش، برای فصل‌های بعدی، حیاتی هستند.

در فصل ۳، ما با استفاده از فورسینگ به کمک زیرساختارهای مقدماتی، به سوال زیر از گیتیک[5]، در حالت خاص $\kappa = \aleph_۲$ پاسخ می‌دهیم.

[1]Nonstationary
[2]U. Abraham
[3]Proper Forcing Axiom
[4]Strongly Proper
[5]Moti Gitik

فرض کنید در ساختار زمینهٔ[1] V، GCH برقرار و κ یک کاردینال نامتناهی است. آیا فورسینگی وجود دارد به طوری که کاردینال‌ها و GCH را حفظ کند، و در گسترش ژنریک $V[G]$، مجموعهٔ $A \subseteq \kappa$ از کاردینالیتهٔ κ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعهٔ شمارای نامتناهی $x \in \mathcal{P}(\kappa) \cap V$، مجموعه‌های $x \cap A$ و $x \setminus A$ ناتهی باشند؟

در واقع می‌دانیم برای هر کاردینال نامتناهی، فورسینگی وجود دارد به طوری که وجود مجموعهٔ A را اجبار می‌کند. اما برای $\kappa \geq \aleph_2$، این فورسینگ فرضیهٔ پیوستار را حفظ نمی‌کند. در فصل ۳، با استفاده از شرط‌های جانبی ماتریسی تودورچویچ، فورسینگی معرفی می‌کنیم که به سوال گیتیک برای $\kappa = \aleph_2$ پاسخ می‌دهد. همچنین نشان می‌دهیم فورسینگ معرفی شده، به طور قوی سره و $\aleph_2-$c.c. است، لذا همهٔ کاردینال‌ها را نیز حفظ می‌کند. مجموعهٔ A الحاق شده توسط فورسینگ معرفی شده در ۳−۳−۱، مجموعهٔ فراژنریک[2] است؛ یعنی هر زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی از A یا $\omega_2 \setminus A$ روی ساختار زمینه، کوهن ژنریک[3] است.

در فصل ۴، با استفاده از زیرساختارهای مقدماتی شمارا، تعمیمی از فورسینگ آبراهام در [۱] برای الحاق مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در ω_1، معرفی می‌کنیم که $\aleph_1$ را حفظ می‌کند. شلاه برای هر $\alpha < \omega_1$ یک تقویت فنی از سره بودن معرفی کرده است که با عنوان αـ سره[4] شناخته شده است. در بخش ۴−۲ به بحث و بررسی این مفهوم می‌پردازیم و تعاریف لازم برای آن را یادآوری می‌کنیم. در بخش ۴−۳ با الهام از تکنیک نیمن و با شرط‌های متناهی، تعمیمی از فورسینگ آبراهام برای الحاق زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در ω_1، معرفی می‌کنیم که به طور قوی سره است و ωـ سره نیست. شلاه همچنین نشان داده است برای هر اردینال تجزیه‌ناپذیر[5] α فورسینگی وجود دارد به طوری که $< \alpha$ـ سره است و αـ سره نیست. در بخش ۴−۴ برای هر اردینال تجزیه‌ناپذیر $\alpha < \omega_1$، تعمیم $\mathbb{P}[\alpha]$ از فورسینگ بخش ۴−۳ را معرفی می‌کنیم که مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران آبراهام به ω_1 الحاق می‌کند، $< \alpha$ـ سره است و αـ سره نیست.

[1] Ground Model

[2] Highly Generic

[3] Cohen Generic

[4] α-proper

[5] Indecomposable Ordinal

فصل دوم:

تعاریف و قضایای مقدماتی

۲–۱ زیرساختارهای مقدماتی

در این رساله از ساختارهای ZFC استفاده می‌کنیم؛ نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها با اصول موضوعهٔ تسرملو–فرانکل[1] به همراه اصل انتخاب [۱۹، بخش ۷.۰]. در صورت افزودن اصولی دیگر مانند فرضیهٔ پیوستار یا فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافته، حتماً ذکر خواهد شد. زبان این نظریه $\mathscr{L}_\in = \{\in\}$، و فرض پایه این است که نظریه سازگار است. بنابراین به استناد قضیه تمامیت[2] گودل[3]، ساختاری[4] دارد [۲۴، قضیه ۶.۲.۳].

V را ساختار گوییم، هرگاه $\langle V, \in\rangle$ متشکل از دامنهٔ V به همراه رابطهٔ دوتایی عضویت $\in$ در زبان $\mathscr{L}_\in$، یعنی رابطهٔ واقعی عضویت، ZFC را برآورده می‌کند. در غیر این صورت حتماً ذکر خواهد شد. به عنوان مثال $M \models \mathrm{ZFC} - \mathrm{P}$ به این معنی است که M ساختاری است که تمام اصول موضوعهٔ ZFC به جز اصل مجموعهٔ توانی[5] را برآورده می‌کند؛ یا $M \models \mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ به این معنی است که M ساختار ZFC به همراه فرضیهٔ پیوستار تعمیم‌یافته است. همچنین در بسیاری از موارد نیاز داریم بر روی ساختار، یک خوش‌ترتیبی[6] $\trianglelefteq$ در نظر گرفته شود. وجود این خوش‌ترتیبی به دلیل وجود اصل انتخاب، بدیهی است.

قرارداد ۱. فرض کنید M و N دو ساختار باشند. منظور از "M و N یکریخت[7] هستند" این است که تابع دوسویی $\psi\colon M \longrightarrow N$ وجود دارد، به طوری که برای هر $x, y \in M$

$$x \in y \iff \psi(x) \in \psi(y).$$

در واقع منظور از یکریختی، همان یکریختی از منظر نظریهٔ مدل[8] است که ساختار را حفظ می‌کند و به صورت

$$\langle M, \in, \ldots\rangle \cong \langle N, \in, \ldots\rangle$$

[1] Zermlo-Frankel
[2] Completeness Theorem
[3] Kurt F. Gödel
[4] Structure
[5] Axiom of powerset
[6] well-ordering
[7] Isomorphic
[8] Model Theory

نمایش داده می‌شود. معمولاً یکریختی دو ساختار، به صورت $M \cong N$ نمایش داده می‌شود و نگاشت منحصر به فرد گواه بر این یکریختی را به صورت $\psi_{M,N}\colon M \xrightarrow{\cong} N$ یا $\varphi_{M,N}\colon M \xrightarrow{\cong} N$ مشخص می‌کنیم.

ملاحظه ۲-۱-۱. قضیهٔ فروریزی مستوفسکی[1] [۱۴، قضیه ۱۵.۶] نتیجه می‌دهد برای هر ساختار M ساختار متعدی منحصر به فرد $\bar{M}$ وجود دارد. نگاشت منحصر به فرد گواه بر این یکریختی را به صورت $\psi_M\colon M \xrightarrow{\cong} \bar{M}$ یا $\varphi_M\colon M \xrightarrow{\cong} \bar{M}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۱-۲. [۱۶، تعریف ۲.۱۲] فرض کنید $\langle V, \in, \trianglelefteq, \dots \rangle$ ساختار باشد. گوییم

$$\langle M, \in, \trianglelefteq \restriction M^{2}, \dots \rangle$$

زیرساختار مقدماتی V است، هرگاه $M \subseteq V$ و برای هر فرمول φ با متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ و هر $a_1, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم:

$$V \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff M \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

در این صورت $\trianglelefteq \restriction M^{2}$ خوش ترتیبی القا شده روی M است که همه جا آن را به همان صورت قبل، $\trianglelefteq$ نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری ۱. M زیرساختار مقدماتی V است را به صورت $M \prec V$ نشان می‌دهیم.

لم ۲-۱-۳. [۱۶، قضیه ۶.۱۲] *اگر V ساختاری با کاردینالیتهٔ θ در زبان $\mathscr{L}$ و $|\mathscr{L}| \leq \beta \leq \theta$ کاردینال نامتناهی باشد، آن‌گاه V زیرساختار مقدماتی با کاردینالیتهٔ β دارد. به علاوه برای هر مجموعهٔ $x \subseteq V$ اگر $|x| \leq \beta$، آن‌گاه V زیرساختار مقدماتی با کاردینالیتهٔ β دارد که شامل x است.*

[1] Mostowski's Collapsing Theorem

لم ۲–۱–۴. [[۱۴](#)، لم ۱.۶] *برای هر مجموعهٔ x مجموعهٔ متعدی $x \subseteq y$ وجود دارد.*

اثبات. با استقرا تعریف می‌کنیم:

- $x_0 = x$
- $x_{n+1} = \cup x_n$
- $y = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$

در این صورت مجموعهٔ y متعدی و شامل x است. ■

چون رابطهٔ $\cup z \subseteq z$ برای هر مجموعهٔ متعدی z برقرار است، لذا مجموعهٔ y تعریف شده در برهان لم ۲–۱–۴، کوچکترین مجموعهٔ متعدی شامل x است. چنین مجموعه‌ای را بستار متعدی[1] مجموعهٔ x می‌نامیم:

$$\mathrm{TC}(x) = \cap\{y\colon \text{متعدی است } y \text{ و } y \supseteq x\}.$$

نمادگذاری ۲. برای هر کاردینال منتظم θ، H_θ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تمام مجموعه‌هایی است که کاردینالیتهٔ بستار متعدی آن‌ها کمتر از θ باشد:

$$H_\theta = \{x\colon |\mathrm{TC}(x)| < \theta\}.$$

لم ۲–۱–۵. [۱۸، قضیه ۵.۶.۴] *اگر θ کاردینال ناشمارای منتظم باشد، آن‌گاه H_θ ساختار $\mathrm{ZFC} - P$ است.*

لم ۲–۱–۶. [۱۸، قضیه ۶.۶.۴] *اگر θ کاردینال غیرقابل دسترس[2] باشد، آن‌گاه H_θ ساختار ZFC است.*

نمادگذاری ۳. فرض کنید x مجموعه و $\kappa \leq |x|$ کاردینال است. مجموعهٔ $\{y \subseteq x\colon |y| = \kappa\}$ را با $[x]^\kappa$ نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری ۴. برای کاردینال‌های $\kappa \leq \theta$،

$$\mathcal{E}_{\kappa,\theta} = \{M \in [H_\theta]^\kappa : M \prec H_\theta\}.$$

---
[1] Transitive Closure
[2] Inaccessible Cardinal

قرارداد ۲. فرض کنید f تابع باشد. برای هر $x \subseteq \mathrm{dom}(f)$ مجموعهٔ $\{f(a) \colon a \in x\}$ را با $f''x$، و $f''\mathrm{dom}(f)$ را با $\mathrm{ran}(f)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۲–۱–۷. *فرض کنید M ساختاری از کاردینالیتهٔ $\aleph_0$ و x مجموعهٔ متناهی یا شمارای نامتناهی باشد. اگر $x \in M$، آنگاه $x \subseteq M$.*

اثبات. چون M ساختار ZFC است، پس $\omega \cup \{\omega\} \subseteq M$. گیریم $f \colon \omega \to x$، دوسویی در M است که نشان می‌دهد x شمارای نامتناهی است. از آنجا که $\omega \subseteq M$، برای هر $n \in \omega$، $f(n) \in M$. بنابراین $x = f''\omega \subseteq M$. به همین ترتیب برای $f : n \to x$، دوسویی در M که نشان می‌دهد x متناهی است اثبات می‌شود. ■

نمادگذاری ۵. برای هر $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$، اردینال شمارای $M \cap \omega_1$ را با δ_M و $\sup(M \cap \omega_2)$ را با δ'_M نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲–۱–۸. [۱۴، تعریف ۲۱.۸] فرض کنید A مجموعه و $|A| \leq \theta$ کاردینال است. مجموعهٔ $C \subseteq [A]^\theta$ را بستهٔ بی‌کران در $[A]^\theta$ گوییم هرگاه:

۱. برای هر $x \in [A]^\theta$، $y \in C$ وجود داشته باشد به طوری که $x \subseteq y$، و

۲. برای هر دنبالهٔ $\subseteq$ـ صعودی[1] $\langle x_\xi \colon \xi < \alpha < \theta\rangle$ از اعضای C، $\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi \in C$.

مجموعهٔ $S \subseteq [A]^\theta$ را پایا گوییم، هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران $C \subseteq [A]^\theta$، $C \cap S \neq \emptyset$.

تعریف ۲–۱–۹. [۱۴، تعریف ۱.۸] گیریم κ کاردینال ناشمارای منتظم است.

مجموعهٔ $C \subseteq \kappa$ زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در κ است، هرگاه در κ بی‌کران و شامل نقاط حدی خودش باشد.

مجموعهٔ $S \subseteq \kappa$ پایا است، هرگاه همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران κ را قطع کند.

[1] $\subseteq$-increasing

۲–۲ فورسینگ

تعریف ۲–۲–۱. [۱۸، تعریف ۱.۲.۷] سه‌تایی $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}} \rangle$ را مفهوم فورسینگ گوییم هرگاه:

۱. $\leq_{\mathbb{P}}$ ترتیب جزئی[1] روی $\mathbb{P}$ باشد و

۲. برای هر $p \in \mathbb{P}$، $p \leq_{\mathbb{P}} 1_{\mathbb{P}}$.

معمولاً از $\mathbb{P}$ به عنوان فورسینگ نام می‌بریم و زیرنویس‌های مربوط به $\leq$ و 1 را نیز حذف می‌کنیم.

قرارداد ۳. هر عنصر $\mathbb{P}$ شرط نامیده می‌شود. هرگاه $p, q \in \mathbb{P}$ و $q \leq p$، می‌گوییم q گسترشی از q است.

قرارداد ۴. فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ باشد و $p, q \in \mathbb{P}$. گوییم p و q سازگار[2] هستند ($p \parallel q$)، هرگاه گسترش مشترک[3] داشته باشند، و ناسازگار[4] هستند ($p \perp q$)، هرگاه گسترش مشترک نداشته باشند.

قرارداد ۵. همواره فرض می‌کنیم ساختار V وجود دارد به طوری که فورسینگ $\mathbb{P}$ به آن تعلق دارد. V را ساختار زمینه[5] می‌نامیم.

تعریف ۲–۲–۲. [۲۶، تعریف ۳.۱.۱] گیریم $\mathbb{P}$ فورسینگ است.

$D \subseteq \mathbb{P}$ را چگال گوییم، هرگاه برای هر $p \in \mathbb{P}$، $r \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $r \leq p$.

$D \subseteq \mathbb{P}$ را چگال باز گوییم، هرگاه D چگال باشد و برای هر $r \in D$ اگر $s \leq r$، آن‌گاه $s \in D$.

تعریف ۲–۲–۳. [۲۶، تعریف ۱۵.۱.۱] گیریم $\mathbb{P}$ فورسینگ است. $D \subseteq \mathbb{P}$ را پیش‌چگال[6] گوییم، هرگاه برای هر $p \in \mathbb{P}$، $r \in D$ وجود داشته باشد به طوری که p و r سازگار باشند.

تعریف ۲–۲–۴. [۱۸، تعریف ۲.۲.۲] گیریم $\mathbb{P}$ فورسینگ است. $A \subseteq \mathbb{P}$ را پادزنجیر گوییم، هرگاه هر دو عضو متمایز A ناسازگار باشند.

---

[1] Partial Order
[2] Compatible
[3] Common Extension
[4] Incompatible
[5] Ground Model
[6] Pre-dense

تعریف ۲–۲–۵. [۲۶، تعریف ۱۵.۱.۱] گیریم $\mathbb{P}$ فورسینگ است ، $D, A \subseteq \mathbb{P}$ و $p \in \mathbb{P}$.

گوییم D زیر p چگال است، هرگاه برای هر $q \in \mathbb{P}$ اگر $q \leq p$، آنگاه $r \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $r \leq q$.

D زیر p پیش‌چگال است، هرگاه برای هر $q \in \mathbb{P}$ اگر $q \leq p$، آنگاه $r \in D$ وجود داشته باشد به طوری که r و q سازگار باشند.

A زیر p پادزنجیر است، هرگاه برای هر $q, r \in A$ اگر $q, r \leq p$، آنگاه $q \perp r$.

تعریف ۲–۲–۶. [۱۴، تعریف ۱.۱۴] فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ باشد. $G \subseteq \mathbb{P}$ را فیلتر گوییم، هرگاه:

۱. $\forall p, q \in G \; \exists r \in G \; ((r \leq p) \wedge (r \leq q))$،

۲. $\forall p, q \in \mathbb{P} \; (((p \in G) \wedge (p \leq q)) \implies q \in G)$.

تعریف ۲–۲–۷. [۱۴، تعریف ۱.۱۴] فرض کنید $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ باشد. $G \subseteq \mathbb{P}$ را فیلتر $\mathbb{P}$ـ ژنریک روی V گوییم، هرگاه:

۱. G فیلتر باشد و

۲. برای هر $D \subseteq \mathbb{P}$ که چگال باز است اگر $D \in V$، آنگاه $G \cap D \neq \emptyset$.

در صورتی که ابهامی وجود نداشته باشد، G را فیلتر ژنریک می‌گوییم.

لم ۲–۲–۸. *فرض کنید $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ و $G \subseteq \mathbb{P}$ فیلتر باشد. موارد زیر معادلند.*

۱. *G فیلتر ژنریک است.*

۲. *$G \cap D \neq \emptyset$، برای هر $D \in V$ که $D \subseteq \mathbb{P}$ چگال باشد.*

۳. *$G \cap A \neq \emptyset$، برای هر $A \in V$ که $A \subseteq \mathbb{P}$ پادزنجیر ماکسیمال باشد.*

اثبات. (۲ $\rightarrow$ ۱). فرض کنید $D \in V$، زیرمجموعهٔ چگال $\mathbb{P}$ باشد. فرض کنید

$$E = \{q \in \mathbb{P} \colon \exists p \in D (q \leq p)\}.$$

E زیرمجموعهٔ چگال باز $\mathbb{P}$ و در V تعریف‌پذیر است. چون G فیلتر ژنریک است، پس $G \cap E \neq \emptyset$. گیریم $q \in G \cap E$. چون $q \in E$، بنابراین $p \in D$ وجود دارد به طوری که $q \leq p$. چون $q \in G$ و G فیلتر است، پس $p \in G$. بنابراین $p \in G \cap D$.

(۳ $\rightarrow$ ۲). فرض کنید $A \in V$ پادزنجیر ماکسیمال در $\mathbb{P}$ است. فرض کنید

$$D = \{q \in \mathbb{P} \colon \exists p \in A (q \leq p)\}.$$

چون A پادزنجیر ماکسیمال است، پس D چگال است. چون $D \in V$، پس $G \cap D \neq \emptyset$. گیریم $q \in D \cap G$. چون $q \in D$، لذا $p \in A$ وجود دارد به طوری که $q \leq p$. چون $q \in G$، پس $p \in G$. بنابراین $p \in G \cap A$.

(۱ $\rightarrow$ ۳). فرض کنید $D \in V$ زیرمجموعهٔ چگال باز $\mathbb{P}$ باشد. گیریم $A \subseteq D$ پادزنجیر ماکسیمال است. اگر $A \subseteq \mathbb{P}$ پادزنجیر ماکسیمال باشد، آن‌گاه $G \cap A \neq \emptyset$، و چون $A \subseteq D$، پس $G \cap D \neq \emptyset$. بنابراین کافی است نشان دهیم $A \subseteq \mathbb{P}$ پادزنجیر ماکسیمال است. در غیر این صورت، $r \in \mathbb{P} \setminus D$ وجود دارد به طوری که با همه اعضای A ناسازگار است. چون D چگال است، پس $s \in D$ وجود دارد به طوری که $s \leq r$. چون $A \subseteq D$، پادزنجیر ماکسیمال است، پس $t \in A$ وجود دارد به طوری که با s سازگار است. بنابراین t و r سازگار هستند که با فرض در تناقض است. ■

لم ۲–۲–۹. *فرض کنید $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ باشد. هرگاه G فیلتر ژنریک باشد و $p \in G$، موارد زیر برقرارند:*

۱. *اگر $D \in \mathcal{P}^V(\mathbb{P})$ زیر p چگال باشد، آن‌گاه $G \cap D \neq \emptyset$؛*

۲. *اگر $D \in \mathcal{P}^V(\mathbb{P})$ زیر p پیش‌چگال باشد، آن‌گاه $G \cap D \neq \emptyset$.*

اثبات. ۱. فرض کنید D و $p \in G$ داده شده‌اند. گیریم

$$E = D \cup \{q \in \mathbb{P} \colon q \perp p\}.$$

$E \subseteq \mathbb{P}$ چگال و در V تعریف‌پذیر است. بنابراین طبق لم ۲–۲–۸، $G \cap E \neq \emptyset$. فرض کنید $q \in G \cap E$. در این صورت چون هر دو عضو G سازگار هستند، پس $q \in D$. بنابراین $G \cap D \neq \emptyset$.

۲. فرض کنید D و $p \in G$ داده شده‌اند. گیریم

$$E = \{r \in \mathbb{P} \colon \exists q \in D (r \leq q)\}.$$

$E \in V$ و زیر p چگال است. بنابراین طبق قسمت (۱) همین لم، $G \cap E \neq \emptyset$. گیریم $r \in G \cap E$. چون $r \in E$، پس $q \in D$ وجود دارد به طوری که $r \leq q$. چون $r \in G$، پس $q \in G$. بنابراین $G \cap D \neq \emptyset$. ■

تعریف ۲-۲-۱۰. [۱۸، تعریف ۵.۲.۷] فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ است. $\underset{\sim}{x}$ را $\mathbb{P}$ـ ترم گوییم، هرگاه $\underset{\sim}{x}$ مجموعه‌ای از زوج مرتب‌های $\langle \underset{\sim}{y}, p \rangle$ باشد که در آن $p \in \mathbb{P}$ و $\underset{\sim}{y}$ $\mathbb{P}$ـ ترم است.

کلاس همهٔ $\mathbb{P}$ـ ترم‌های ساختار V را با $V^{\mathbb{P}}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۲-۱۱. [۱۸، تعریف ۷.۲.۷] فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ و $G \subseteq \mathbb{P}$ فیلتر ژنریک است. برای هر $\mathbb{P}$ـ ترم $\underset{\sim}{x}$، تعبیر $\underset{\sim}{x}$ با G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underset{\sim}{x}[G] = \{\underset{\sim}{y}[G] \colon \langle \underset{\sim}{y}, p \rangle \in \underset{\sim}{x} \text{ و } p \in G\}.$$

تعریف ۲-۲-۱۲. [۱۸، تعریف ۸.۲.۷] فرض کنید $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ و $G \subseteq \mathbb{P}$ فیلتر ژنریک است. گسترش ژنریک V را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V[G] = \{\underset{\sim}{x}[G] \colon \underset{\sim}{x} \in V^{\mathbb{P}}\}.$$

در تعریف ۲-۲-۱۳ به معرفی رابطهٔ فورسینگ ($\Vdash$)، که رابطه‌ای بین شرط‌های فورسینگ و جملات زبان فورسینگ است می‌پردازیم. رابطهٔ فورسینگ، که در ساختار زمینهٔ V تعریف می‌شود تعمیمی از رابطهٔ برآورده کردن ($\models$) است و درستی در گسترش ژنریک را به درستی در ساختار زمینه کاهش می‌دهد. در حقیقت برای ارجاع به اعضای گسترش ژنریک، به $\mathbb{P}$ـ ترم آن‌ها در ساختار زمینه رجوع می‌کنیم.

تعریف ۲–۲–۱۳. [[۲۶](#)، تعریف ۱۳.۱.۱] فرض کنید $p \in \mathbb{P}$، $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$ و $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ فرمولی با متغیرهای آزاد در بین $v_1, \ldots, v_n$ است. تعریف می‌کنیم:

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n)$$

(می‌گوییم p اجبار می‌کند $\varphi(\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n)$ راست است)، هرگاه برای هر فیلتر $\mathbb{P}$ـ ژنریک G روی V اگر $p \in G$، آن‌گاه

$$V[G] \models \varphi(\underset{\sim}{x}_1[G], \ldots, \underset{\sim}{x}_n[G]).$$

در صورتی که ابهامی پیش نیاید، زیرنویس روی $\Vdash$ را حذف می‌کنیم.

لم ۲–۲–۱۴. [[۱۴](#)، قضیه ۷.۱۴] *فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ، $p \in \mathbb{P}$ و φ فرمول باشد. در این صورت*

۱. $p \Vdash \varphi$ *اگر و تنها اگر* $\forall q \leq p(q \Vdash \varphi)$.

۲. $p \Vdash \neg\varphi$ *اگر و تنها اگر* $\neg\exists q \leq p(q \Vdash \varphi)$.

نتیجه ۲–۲–۱۵. *فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ و φ فرمول است. $1_{\mathbb{P}} \Vdash \varphi$ اگر و تنها اگر به ازای هر $p \in \mathbb{P}$، $p \Vdash \varphi$. در این صورت می‌گوییم $\mathbb{P} \Vdash \varphi$.*

لم ۲–۲–۱۶ (درستی). [[۱۴](#)، قضیه ۶.۱۴] *فرض کنید $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$ و $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ فرمول است. در این صورت*

$$(\exists p \in G)p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n) \text{ اگر و تنها اگر } V[G] \models \varphi(\underset{\sim}{x}_1[G], \ldots, \underset{\sim}{x}_n[G])$$

قرارداد ۶. فرض کنید $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ باشد. گیریم

- برای هر $x \in V$، $\check{x} = \{\langle \check{y}, 1 \rangle : y \in x\}$.
- $\dot{G} = \{\langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$.

لم ۲–۲–۱۷. *اگر $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ باشد و $x \in V$، آن‌گاه $\check{x}$ و $\dot{G}$ $\mathbb{P}$ـ ترم هستند و برای هر فیلتر ژنریک H، $\check{x}[H] = x$ و $\dot{G}[H] = H$.*

اثبات. از آنجا که هر عضو $\check{x}$ و $\dot{G}$ زوج مرتبی شامل یک $\mathbb{P}$ــ ترم و یک شرط فورسینگ است، لذا $\check{x}$ و $\dot{G}$ $\mathbb{P}$ــ ترم هستند. چون $\check{\emptyset} = \emptyset$، پس $\check{\emptyset}[H] = \emptyset$. اکنون فرض کنید برای هر $y \in x$، $\check{y}[H] = y$. بنابراین

$$\check{x}[H] = \{\check{y}[H] \colon \langle \check{y}, ۱\rangle \in \check{x}\} = \{y \colon y \in x\} = x.$$

با توجه به قسمت اول اثبات،

$$\dot{G}[H] = \{\check{p}[H] \colon (\langle \check{p}, p\rangle \in \dot{G}) \wedge (p \in H)\} = \{p \colon p \in H\} = H.$$

■

قضیه ۲ــ۲ــ۱۸. [۱۴، قضیه ۵.۱۴] *فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ باشد. برای هر فیلتر ژنریک G روی V، گسترش ژنریک $V[G]$، کوچکترین ساختاری است که در شرایط زیر صدق می‌کند.*

۱. $V[G] \models \mathrm{ZFC}$؛

۲. $V \cup \{G\} \subseteq V[G]$؛

۳. $V[G] \cap \mathrm{ON} = V \cap \mathrm{ON}$.

در ادامه، دو مثال برای کاربرد روش فورسینگ آورده‌ایم که علاوه بر نمایش جزییات بیشتر، در فصل ۳ نیز استفاده خواهند شد.

سوال ۲ــ۲ــ۱۹. [۷] آیا ZFC با نقیض فرضیهٔ پیوستار سازگار است؟

کوهن برای پاسخ مثبت به این سوال، با استفاده از روش فورسینگ، ساختاری از نظریهٔ مجموعه‌ها می‌سازد که در آن تعداد اعداد حقیقی بیشتر از $\aleph_۱$ است. در واقع کوهن اثبات می‌کند $V[G] \models ۲^{\aleph_۰} \geq \aleph_۲$.

فرض کنید

$$\mathrm{Add}(\aleph_0,\aleph_2)=\{p\colon \omega\times\omega_2\to 2\colon |p|<\aleph_0\}$$

مجموعهٔ همهٔ توابع جزئی[1] از $\omega\times\omega_2$ به توی ۲، یعنی توابعی است که دامنهٔ آن‌ها زیرمجموعهٔ متناهی $\omega\times\omega_2$ و برد آن‌ها $\{0,1\}$ باشد؛ تابعی که نمودار زیر را جابجایی کند.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(p) \arrow[d, hook] \arrow[dr, "p"] & |\mathrm{dom}(p)|<\aleph_0 \\
\omega\times\omega_2 \arrow[r] & 2
\end{tikzcd}$$

ترتیب روی $\mathrm{Add}(\aleph_0,\aleph_2)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q\leq p \iff p\subseteq q$$

در واقع $q\leq p$، هرگاه نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(p) \arrow[dr, "p"'] & \subseteq & \mathrm{dom}(q) \arrow[dl, "q"] \\
& 2 &
\end{tikzcd}$$

در این صورت $\langle \mathrm{Add}(\aleph_0,\aleph_2),\leq,\emptyset\rangle$ فورسینگ است. فرض کنید $G\subseteq \mathrm{Add}(\aleph_0,\aleph_2)$ فیلتر ژنریک باشد.

لم ۲-۲-۲۰. $G\notin V$.

اثبات. با برهان خلف، فرض می‌کنیم $G\in V$ و بنابراین $\mathrm{Add}(\aleph_0,\aleph_2)\setminus G\in V$. اکنون نشان می‌دهیم $\mathrm{Add}(\aleph_0,\aleph_2)\setminus G$ چگال باز است. فرض کنید p شرط دلخواه باشد. اگر $p\notin G$، آن‌گاه چون $p\leq p$ و همچنین $p\in \mathrm{Add}(\aleph_0,\aleph_2)\setminus G$، پس حکم برقرار است. فرض کنیم $p\in G$. چون $\mathrm{dom}(p)$ متناهی است، بنابراین $a\in\omega\times\omega_2$ وجود دارد به طوری که $a\notin\mathrm{dom}(p)$. تعریف می‌کنیم:

$q=p\cup\{\langle a,0\rangle\}$ و $r=p\cup\{\langle a,1\rangle\}$.

[1] Partial Function

q و r دو شرط فورسینگ هستند که p را گسترش می‌دهند و با هم ناسازگارند. از آنجا که G فیلتر است، پس حداقل یکی از این دو شرط باید در $\mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2) \setminus G$ باشد. همچنین اگر $p \in \mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2) \setminus G$، آن‌گاه هر گسترش p نیز الزاماً در $\mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2) \setminus G$ خواهد بود. زیرا در غیر این صورت بنا به فیلتر بودن G، $p \in G$ که تناقض است. بنابراین $\mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2) \setminus G$ چگال باز است و چون G ژنریک است، لذا $G \cap (\mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2) \setminus G) \neq \emptyset$ که تناقض است. ■

قرارداد ۷. به فورسینگ‌هایی مانند $\mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2)$ که در آن‌ها برای هر شرط p دو شرط q و r وجود دارد به طوری که $q, r \leq p$ و $q \perp r$، فورسینگ بدون اتم[1] می‌گوییم.

لم ۲–۲–۲۱. [۱۸، لم ۴.۲.۷] *اگر $\mathbb{P}$ فورسینگ بدون اتم و $G \subseteq \mathbb{P}$ ژنریک باشد، آن‌گاه $G \notin V$.*

لم ۲–۲–۲۲. *$F = \cup G : \omega \times \omega_2 \longrightarrow 2$ تابع در $V[G]$ است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم F خوش‌تعریف است. فرض کنید $x_1 = x_2$. چنانچه $F(x_1) \neq F(x_2)$، چون هر شرط فورسینگ، تابع در نظر گرفته شده است، بنابراین باید $p_1, p_2 \in G$ وجود داشته باشند به طوری که $p_1(x_1) \neq p_2(x_2)$. این امکان ندارد، زیرا G فیلتر می‌باشد. اکنون فرض کنید $x \in \omega \times \omega_2$. فرض کنید

$$D_x = \{q \in \mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2) \colon x \in \mathrm{dom}(q)\}.$$

D_x چگال باز است، بنابراین $G \cap D_x \neq \emptyset$. لذا $q \in G$ وجود دارد به طوری که $x \in \mathrm{dom}(q)$. بنابراین $x \in \mathrm{dom}(F)$. ■

اکنون برای هر $\alpha \in \omega_2$، تعریف می‌کنیم $f_\alpha \colon \omega \to 2$ به طوری که برای هر $n \in \omega$، $f_\alpha(n) = F(n, \alpha)$.

لم ۲–۲–۲۳. *اگر $\alpha \neq \beta$، آن‌گاه $f_\alpha \neq f_\beta$.*

اثبات. فرض کنید

$$D_{\alpha,\beta} = \{q \in \mathrm{Add}(\aleph_0, \aleph_2) \colon \exists n \in \omega((\langle n, \alpha\rangle, \langle n, \beta\rangle \in \mathrm{dom}(q)) \wedge (q(\langle n, \alpha\rangle) \neq q(\langle n, \beta\rangle)))\}.$$

$D_{\alpha,\beta}$ چگال باز است، بنابراین $G \cap D_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$. لذا $n \in \omega$ وجود دارد به طوری که $F(\langle n, \alpha\rangle) \neq F(\langle n, \beta\rangle)$. لذا $f_\alpha \neq f_\beta$. ■

[1] Atomless

لم ۲–۲–۲۴. *برای هر* $\alpha \in \omega_۲$، $f_\alpha \notin V$.

اثبات. برای تابع $g\colon \omega \longrightarrow ۲$ در V، مجموعهٔ

$$D_g = \{q \in \mathrm{Add}(\aleph_۰, \aleph_۲)\colon \exists n \in \omega (q(\langle n, \alpha\rangle) \neq g(n))\}$$

چگال باز است. بنابراین مانند لم ۲–۲–۲۳، $n \in \omega$ وجود دارد به طوری که $f_\alpha(n) \neq g(n)$. ■

بنابراین در $V[G]$، $\aleph_۲^V$ عدد حقیقی جدید داریم. لم‌های ۲–۲–۲۶ و ۲–۲–۲۷ نشان خواهند داد که در واقع $\aleph_۲^{V[G]} = \aleph_۲^V$. بنابراین $V[G] \models ۲^{\aleph_۰} \geq \aleph_۲$، که تایید می‌کند در $V[G]$ فرضیهٔ پیوستار برقرار نیست.

تعریف ۲–۲–۲۵. [۱۴، تعریف ۲.۱۵] گوییم فورسینگ $\mathbb{P}$ در شرط κـ زنجیر[۱] صدق می‌کند یا $\kappa-$c.c. است، هرگاه هر پادزنجیر در $\mathbb{P}$ از کاردینالیتهٔ کمتر از κ باشد. $\aleph_۱-$c.c. را c.c.c. (شرط زنجیر شمارا) نیز می‌گوییم.

لم ۲–۲–۲۶. [۱۴، قضیه ۳.۱۵] *فرض کنید κ کاردینال منتظم باشد. اگر فورسینگ $\mathbb{P}$ شرط κـ زنجیر را برآورده کند، آن‌گاه κ همچنان کاردینال منتظم در گسترش ژنریک توسط $\mathbb{P}$ باقی می‌ماند.*

لم ۲–۲–۲۷. [۱۴، لم ۳۵.۱۴] *$\mathrm{Add}(\aleph_۰, \aleph_۲)$، $\aleph_۱-$c.c. است.*

ملاحظه ۲–۲–۲۸. [۱۴، (۱.۱۵)] برای هر کاردینال κ اگر $\mathrm{cof}(\kappa) > \omega$، آن‌گاه

$$\mathrm{Add}(\aleph_۰, \kappa) = \{p\colon \omega \times \kappa \to ۲\colon |p| < \aleph_۰\}$$

مجموعهٔ همهٔ توابع جزئی از $\omega \times \kappa$ به توی ۲، با ترتیب شمول عکس[۲]، فورسینگی است که در گسترش ژنریک آن حداقل κ عدد حقیقی وجود دارد.

قرارداد ۸. به زیرمجموعه‌های ω، که به صورت بالا، الحاق می‌شوند، اعداد حقیقی کوهن ژنریک می‌گوییم.

سوال ۲–۲–۲۹. [۱۲] فرض کنید κ کاردینال نامتناهی باشد. آیا مجموعهٔ $A \subseteq \kappa$، از کاردینالیتهٔ κ وجود دارد به طوری که برای هر مجموعهٔ شمارای نامتناهی $x \in \mathcal{P}(\kappa) \cap V$، $A \cap x$ و $(\kappa \setminus A) \cap x$ ناتهی باشند؟

[1] Chain Condition

[2] Reverse Inclusion

$$\mathbb{P}_\kappa = \{p\colon \kappa \to ۲\colon |p| < \aleph_۰\}$$

مجموعهٔ همهٔ توابع جزئی از κ به توی ۲، یعنی توابعی است که دامنهٔ آن‌ها زیرمجموعهٔ متناهی κ و برد آن‌ها $\{۰,۱\}$ باشد؛ تابعی که نمودار زیر را جابجایی کند.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(p) \arrow[d, hook] \arrow[dr, "p"] & |\mathrm{dom}(p)| < \aleph_۰ \\
\kappa \arrow[r] & ۲
\end{tikzcd}$$

ترتیب روی $\mathbb{P}_\kappa$ را شمول عکس در نظر بگیرید. در این صورت، $1_{\mathbb{P}_\kappa}$ تابع تهی خواهد بود. اگر G فیلتر ژنریک باشد، همانند برهان سوال ۲–۲–۱۹، $\cup G\colon \kappa \longrightarrow ۲$ تابع در $V[G] \setminus V$ است. مجموعهٔ A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{\alpha \in \kappa\colon\ \cup G(\alpha) = ۱\}.$$

فرض کنید x زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی κ در V باشد. مجموعهٔ

$$D_x = \{q \in \mathbb{P}_\kappa\colon \exists \alpha, \beta \in x((\alpha, \beta \in \mathrm{dom}(q)) \wedge (q(\alpha) = ۰) \wedge (q(\beta) = ۱))\}$$

زیرمجموعهٔ چگال باز $\mathbb{P}_\kappa$ است که ناتهی بودن $A \cap x$ و $(\kappa \setminus A) \cap x$ را تضمین می‌کند. بنابراین فقط کافی است نشان دهیم $|A| = \kappa$. با توجه به اینکه شرط‌های فورسینگ متناهی هستند، برای هر $\alpha < \kappa$،

$$D_\alpha = \{q \in \mathbb{P}_\kappa\colon \exists \beta > \alpha((\beta \in \mathrm{dom}(q)) \wedge (q(\beta) = ۱))\}$$

چگال باز است. بنابراین A در κ بی‌کران است و لذا $|A| = \kappa$.

۲–۳ فورسینگ سره

تعریف ۲–۳–۱. [۲۶، تعریف ۹.۱.۳] فورسینگ $\mathbb{P}$ را سره گوییم، هرگاه فورسینگ با $\mathbb{P}$، زیرمجموعه‌های پایای $[\theta]^{\aleph_0}$ را برای هر کاردینال ناشمارای منتظم θ حفظ کند.

طبق تعریف ۲–۳–۱، گیریم فورسینگ سرهٔ $\mathbb{P} \in V$، فیلتر ژنریک $G \subseteq \mathbb{P}$، کاردینال ناشمارای منتظم θ و مجموعهٔ پایای $S \subseteq [\theta]^{\aleph_0}$ دلخواه باشند. در این صورت در $V[G]$، S همچنان زیرمجموعهٔ پایای $[\theta]^{\aleph_0}$ است. یعنی S با همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران $[\theta]^{\aleph_0}$، متعلق به $V[G]$، اشتراک ناتهی دارد.

لم ۲–۳–۲. [۲۶، لم ۱۶.۱.۳] *اگر فورسینگ $\mathbb{P}$ سره باشد، آن‌گاه هر مجموعهٔ شمارا از اردینال‌ها در گسترش ژنریک $V[G]$، توسط مجموعه‌ای شمارا از اردینال‌ها که متعلق به V است، پوشیده می‌شود. بنابراین $\aleph_1^V$ در $V[G]$ ناشمارا است.*

اثبات. فرض کنید a مجموعهٔ شمارای اردینال‌ها در $V[G]$ باشد. لذا کاردینال $\theta^{V[G]}$ وجود دارد به طوری که $a \in [\theta]^{\aleph_0}$. در $V[G]$،

$$C = \{x \in [\theta]^{\aleph_0} : a \subseteq x\}$$

زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران $[\theta]^{\aleph_0}$ است. اما در V، $[\theta]^{\aleph_0}$ زیرمجموعهٔ پایای $[\theta]^{\aleph_0}$ است. چون $\mathbb{P}$ سره است، پس $[\theta]^{\aleph_0}$ در $V[G]$ پایا باقی می‌ماند، لذا در $V[G]$، $C \cap [\theta]^{\aleph_0} \neq \emptyset$. بنابراین مجموعهٔ شمارای x در V وجود دارد به طوری که $a \subseteq x$. حال اگر $\aleph_1^V$ در $V[G]$ شمارا باشد، آن‌گاه با تناقض مواجه خواهیم شد. ■

قرارداد ۹. فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ و θ کاردینال منتظم باشد. گوییم θ به اندازهٔ کافی بزرگ است(نسبت به $\mathbb{P}$)، هرگاه $\theta > (2^{|\mathrm{TC}(\mathbb{P})|})^+$ باشد.

اگر θ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آن‌گاه گزاره‌های جالب توجه در مورد $\mathbb{P}$، بین H_θ و ساختار زمینهٔ V مطلق خواهند بود.

تعریف ۲–۳–۳. [۲۶، تعریف ۵.۲.۳] فرض کنید $q \in \mathbb{P} \in N \prec H_\theta$، جایی که $\mathbb{P}$ فورسینگ و θ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ است. q را $(N, \mathbb{P})$ــ ژنریک گوییم، هرگاه برای هر مجموعهٔ چگال باز $D \subseteq \mathbb{P}$، اگر $D \in N$، آن‌گاه $D \cap N$ زیر q پیش‌چگال باشد.

لم ۲–۳–۴. *[۲۶، لم ۶.۲.۳] فرض کنید $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ باشد. q شرط $(V,\mathbb{P})$ــ ژنریک است اگر و تنها اگر $q \Vdash$ "$V \cap \mathrm{ON} = V[\dot{G}] \cap \mathrm{ON}$".*

اثبات. فرض کنید q شرط $(V,\mathbb{P})$ــ ژنریک و $\underset{\sim}{\tau} \in V$ $\mathbb{P}$ــ ترم یک اردینال باشد. مجموعهٔ

$$D = \{r \in \mathbb{P} \colon \exists \alpha \in \mathrm{ON}(r \Vdash \text{“}\underset{\sim}{\tau} = \check{\alpha}\text{”})\}$$

چگال باز است. چون D توسط $\mathbb{P}$ و $\underset{\sim}{\tau}$ تعریف‌پذیر است، پس $D \in V$ و لذا $D \cap V$ زیر q پیش‌چگال است. فرض کنید f تابع با دامنهٔ D باشد به طوری که برای هر $r \in D$، $f(r) = \alpha$، هرگاه $r \Vdash$ "$\underset{\sim}{\tau} = \check{\alpha}$". چون تابع f توسط D و $\underset{\sim}{\tau}$ تعریف‌پذیر است، لذا $f \in V$. چون $D \cap V$ زیر q پیش‌چگال است، طبق لم ۲–۲–۹، $q \Vdash$ "$\dot{G} \cap (D \cap V) \neq \emptyset$". بنابراین اگر $G \subseteq \mathbb{P}$ فیلتر ژنریک باشد به طوری که $q \in G$، آنگاه در $V[G]$، $r \in D \cap V \cap G$ وجود دارد به طوری که $\underset{\sim}{\tau}[G] = f(r)$. چون $r \in V$، لذا در $V[G]$، $f(r) \in V$ که نتیجه می‌دهد $q \Vdash$ "$\underset{\sim}{\tau} \in V$". برعکس، فرض کنید اگر $\underset{\sim}{\tau} \in V$ $\mathbb{P}$ــ ترم یک اردینال باشد، آنگاه $q \Vdash$ "$\underset{\sim}{\tau} \in V$". فرض کنید $D \in V$ زیرمجموعهٔ چگال باز دلخواه $\mathbb{P}$ باشد. در این صورت تابع $f \in V$ وجود دارد به طوری که $|D|$ را به روی D می‌نگارد. گیریم

$$\underset{\sim}{\tau} = \min\{\check{i} \colon f(i) \in \dot{G}\}.$$

چون $\underset{\sim}{\tau}$ با $\mathbb{P}$ و f در V تعریف‌پذیر است، لذا $\underset{\sim}{\tau} \in V$. همچنین $\underset{\sim}{\tau}$ $\mathbb{P}$ــ ترم یک اردینال است. طبق فرض، $q \Vdash$ "$\underset{\sim}{\tau} \in V$"، پس $q \Vdash \exists i \in V(f(i) \in \dot{G})$. چون $f(i) \in D \cap V$، لذا $q \Vdash \exists r \in D \cap V(r \in \dot{G})$. اکنون اگر $q' \leq q$، آنگاه طبق لم ۲–۲–۱۴، $q' \Vdash \exists r \in D \cap V(r \in \dot{G})$. چون G فیلتر است و $q', r \in G$، بنابراین $D \cap V$ زیر q پیش‌چگال است. ■

لم ۲–۳–۵. *[۲۶، قضیه ۱۲.۲.۳] فرض کنید $q \in \mathbb{P} \in N \prec H_\theta$، جایی که $\mathbb{P} \in V$ فورسینگ و θ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ است. موارد زیر معادل هستند.*

۱. *q شرط $(N,\mathbb{P})$ــ ژنریک است؛*

۲. $q \Vdash$ "$N \cap V = N[\dot{G}] \cap V$"؛

۳. $q \Vdash$ “$A \cap N \cap \dot{G} \neq \emptyset$” *برای هر پادزنجیر ماکسیمال* $A \subseteq \mathbb{P}$ *که متعلق به* N *است؛*

۴. $q \Vdash$ “$D \cap N \cap \dot{G} \neq \emptyset$” *برای هر مجموعهٔ پیش‌چگال* $D \subseteq \mathbb{P}$ *که متعلق به* N *است.*

قضیه ۲–۳–۶. *فرض کنید* $\mathbb{P}$ *فورسینگ باشد. موارد زیر معادل هستند:*

۱. $\mathbb{P}$ *فورسینگ سره است.*

۲. [۲۶، قضیه ۸.۲.۳] *برای هر کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ* θ *و هر* $N \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ *با* $\mathbb{P} \in N$*، هر شرط* $p \in N$ *گسترشی داشته باشد که* $(N, \mathbb{P})$ *ـ ژنریک باشد.*

۳. [۲، قضیه ۱۳.۲] *برای هر کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ* θ *و مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران از زیرساختارهای مقدماتی شمارای* H_θ $N \prec$ *با* $\mathbb{P} \in N$*، هر شرط* $p \in N$ *گسترشی داشته باشد که* $(N, \mathbb{P})$ *ـ ژنریک باشد.*

تعریف ۲–۳–۷. [۲۲، تعریف ۱۴.۲] فرض کنید $q \in \mathbb{P} \in N \prec H_\theta$، جایی که $\mathbb{P}$ فورسینگ و θ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ است. q را به طور قوی $(N, \mathbb{P})$ ـ ژنریک گوییم، هرگاه هر مجموعهٔ چگال باز $D \subseteq \mathbb{P} \cap N$ زیر q پیش‌چگال باشد.

تعریف ۲–۳–۸. [۲۰، تعریف ۱.۳] فورسینگ $\mathbb{P}$ را به طور قوی سره گوییم، هرگاه برای هر کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ θ، و مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران از زیرساختارهای مقدماتی شمارای H_θ $N \prec$ با $\mathbb{P} \in N$، هر شرط $p \in N$ گسترشی داشته باشد که به طور قوی $(N, \mathbb{P})$ ـ ژنریک باشد.

با توجه به تعاریف، و استفاده از لم ۲–۳–۲ می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

قضیه ۲–۳–۹. *اگر فورسینگ* $\mathbb{P}$ *به طور قوی سره باشد، آن‌گاه* $\mathbb{P}$ *سره است، و به ویژه فورسینگ با* $\mathbb{P}$ *منجر به فروریزی* $\aleph_1$ *نمی‌شود.*

اثبات. فرض کنید $\mathbb{P}$ به طور قوی سره و θ کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. طبق تعریف ۲–۳–۸ مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران $C \subseteq \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ وجود دارد به طوری که برای هر $N \in C$، $\mathbb{P} \in N$ و هر $p \in \mathbb{P} \cap N$ گسترش به طور قوی $(N, \mathbb{P})$ ـ ژنریک دارد. گیریم $N \in C$، و $p \in \mathbb{P} \cap N$ دلخواه است. بنابراین $q \leq p$ وجود دارد به طوری

که هر مجموعهٔ چگال باز $D \subseteq \mathbb{P} \cap N$، زیر q پیش‌چگال است. برای اثبات سره بودن $\mathbb{P}$ فرض کنید $E \in N$ زیرمجموعهٔ چگال باز $\mathbb{P}$ باشد. چون N زیرساختار مقدماتی H_θ است، پس می‌داند $E \subseteq \mathbb{P}$ چگال باز است. نشان می‌دهیم $E \cap N \subseteq \mathbb{P} \cap N$ چگال باز است. برای این منظور فرض کنید $r \in \mathbb{P} \cap N$ دلخواه است. چون $M \models \exists s \leq r(s \in E)$، پس $s \in M$ وجود دارد به طوری که $s \leq r$ و $s \in E$. بنابراین $s \in E \cap N$ وجود دارد به طوری که $s \leq r$. چون $E \cap N \subseteq \mathbb{P} \cap N$ چگال باز و q به طور قوی $(N, \mathbb{P})$ـ ژنریک است، لذا برای هر $q' \leq q$، $s \in E \cap N$ و $t \in \mathbb{P}$ وجود دارند به طوری که $t \leq s, q'$. چون p و E دلخواه در نظر گرفته شده‌اند، لذا برای هر $N \in C$، هر $p \in \mathbb{P} \cap N$ گسترش $(N, \mathbb{P})$ـ ژنریک دارد. بنابراین $\mathbb{P}$ طبق قضیهٔ ۲-۳-۶ سره است، و طبق لم ۲-۳-۲ $\aleph_1$ را حفظ می‌کند. ■

۲–۴ فورسینگ به کمک شرط‌های جانبی

تعریف ۲–۴–۱. [۲۹، صفحهٔ ۲۱۰] گیریم $\theta \geq \omega_2$ کاردینال منتظم است. فورسینگ $\mathbb{P}_\in(\theta)$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های متناهی $\in$ـ صعودی از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ است. برای $p, q \in \mathbb{P}_\in(\theta)$، گوییم $q \leq p$ اگر و تنها اگر $p \subseteq q$.

لم ۲–۴–۲. *فرض کنید $\theta < \kappa$ کاردینال‌های منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ نسبت به $\mathbb{P}_\in(\theta)$ باشند. گیریم $\theta \in M' \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\kappa}$ و $M = M' \cap H_\theta$. در این صورت موارد زیر برقرارند.*

۱. $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$؛

۲. $p \in \mathbb{P}_\in(\theta) \cap M' \implies p' = p \cup \{M\} \in \mathbb{P}_\in(\theta)$؛

۳. $M \in q \implies q \cap M \in \mathbb{P}_\in(\theta) \cap M'$.

اثبات. ۱. از آنجا که $\theta \in M'$، H_θ در M' تعریف‌پذیر است. همچنین ساختار شمارای M زیرمجموعهٔ H_θ است و $\delta_M = \delta_{M'}$. اکنون با استفاده از محک تارسکی–وات[1] [۱۶، لم ۵.۱۲]، فرض کنید فرمول $\varphi(x, v_1, \ldots, v_n)$ و $a_1, \ldots, a_n$ اعضای M وجود دارند به طوری که

$$H_\theta \models \exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n).$$

چون $\theta \in H_\kappa$ و $H_\theta \subseteq H_\kappa$، لذا

$$H_\kappa \models \exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n).$$

حال اگر فرض کنیم $b \in H_\kappa$ کوچکترین x نسبت به خوش‌ترتیبی باشد به طوری که $H_\kappa \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$، آن‌گاه $|\mathrm{TC}(b)| < \theta$، زیرا

$$H_\kappa \models \text{“}H_\theta \models \exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\text{”}.$$

پس $H_\theta \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$، و از آنجا که $M' \prec H_\kappa$، M' نیز می‌داند کوچکترین x وجود دارد به طوری که $\varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$. لذا $b_0 \in M'$ وجود دارد به طوری که $|\mathrm{TC}(b_0)| < \theta$ و $M' \models$

[1] Tarski-Vaught test

$\varphi(b_0, a_1, \ldots, a_n)$. در نتیجه $x \in M$ وجود دارد به طوری که $H_\theta \models \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$، پس $M \prec H_\theta$. از آنجا که M شمارا است، لذا $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$.

۲. فرض کنید $p \in \mathbb{P}_{\in}(\theta) \cap M'$. چون $\theta \geq \omega_2$ منتظم است، پس $\mathcal{E}_{\aleph_0,\theta} \subseteq H_\theta$. به دلیل اینکه p زیرمجموعهٔ متناهی $\mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ است، لذا $p \in H_\theta$. بنابراین $p \in M' \cap H_\theta = M$، و از آنجا که p متناهی است، $p \subseteq M$. فرض کنید $p = \langle N_1, \ldots, N_k \rangle$. چون $N_k \in M$ و $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$، پس $p' = \langle N_1, \ldots, N_k, M \rangle$ دنبالهٔ متناهی $\in$ـصعودی از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ است. بنابراین p' شرط فورسینگ است؛ یعنی $p' \in \mathbb{P}_{\in}(\theta)$.

۳. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $q = \langle N_1, \ldots, N_i, M, K_1, \ldots, K_j \rangle$. نشان می‌دهیم $q \cap M$ قسمت ابتدایی[1] q، قبل از M، یعنی $\langle N_1, \ldots, N_i \rangle$ است. اگر $Q \in q \cap M$، آنگاه $Q \neq M$. زیرا در غیر این صورت با تناقض $M \in M$ روبرو خواهیم شد. همچنین $Q \neq K_1, \ldots, K_j$ زیرا در غیر این صورت $Q \in M \in Q$ که تناقض است. اکنون فرض کنیم برای $i \geq n \geq 1$، $Q = N_n$. بنابراین $Q \in q$ و چون Q، M و ساختارهای $N_{n+1}, \ldots, N_i$ شمارا هستند، پس $Q \in M$. بنابراین $q \cap M \in \mathbb{P}_{\in}(\theta)$، و چون $q \cap M$ زیرمجموعهٔ متناهی M است، پس $q \cap M \in M$. ■

قضیه ۲–۴–۳. *$\mathbb{P}_{\in}(\theta)$ به طور قوی سره است.*

اثبات. فرض کنید $\kappa > \theta$ کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و $\mathbb{P}_{\in}(\theta) \in M' \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\kappa}$. همچنین فرض کنید $p \in \mathbb{P}_{\in}(\theta) \cap M'$. قرار دهید $M = M' \cap H_\theta$. لم ۲–۴–۲ نتیجه می‌دهد $p' = p \cup \{M\} \in \mathbb{P}_{\in}(\theta)$. ادعا می‌کنیم p' شرط به طور قوی $(M', \mathbb{P}_{\in}(\theta))$ـژنریک است. برای این منظور فرض کنید $q \leq p'$. چون $M \in q$، لذا لم ۲–۴–۲ نتیجه می‌دهد $q \cap M' \in \mathbb{P}_{\in}(\theta) \cap M'$. گیریم $D \subseteq \mathbb{P}_{\in}(\theta) \cap M'$ چگال باز و $r \in D$ گسترش $q \cap M'$ باشد. فرض کنید $s = r \cup q$. توجه کنید در s، ابتدا اعضای r، سپس M و بعد از آن، قسمت پایانی q بعد از M، می‌آید. از آنجا که $r \subseteq M$، پس s دنبالهٔ $\in$ـصعودی از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ است. بنابراین $s \in \mathbb{P}_{\in}(\theta)$. همچنین طبق تعریف s، $r, q \subseteq s$، لذا $s \leq r, q$. پس D زیر q پیش‌چگال است و بنابراین $\mathbb{P}_{\in}(\theta)$ به طور قوی سره است. ■

[1] Initial Segment

تعریف ۲–۴–۴. [۲۰، تعریف ۱.۲] گیریم $\theta \geq \omega_2$ کاردینال منتظم است. فورسینگ $\mathbb{P}_{\in}^{\mathcal{M}}$ مجموعهٔ همهٔ توابع $p\colon \omega_1 \longrightarrow H_\theta$ است که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. $\mathrm{supp}(p) = \{\alpha\colon p(\alpha) \neq \emptyset\}$ مجموعهٔ متناهی است،

۲. برای هر $\alpha \in \mathrm{supp}(p)$، $p(\alpha)$ زیرمجموعهٔ متناهی $\mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ است که اعضای آن دو به دو یکریخت هستند؛

۳. برای هر $\alpha, \beta \in \mathrm{supp}(p)$، اگر $\alpha < \beta$، آن‌گاه

$$\forall M \in p(\alpha) \exists N \in p(\beta)(M \in N).$$

برای هر $p, q \in \mathbb{P}_{\in}^{\mathcal{M}}$ گوییم $q \leq p$، هرگاه برای هر $\alpha < \omega_1$، $p(\alpha) \subseteq q(\alpha)$.

تعریف ۲–۴–۵. فرض کنید $p \in \mathbb{P}_{\in}^{\mathcal{M}}$. به $w = \langle M_1, \ldots, M_n \rangle$، $\in$ـ مسیر[1] در p گوییم، هرگاه:

۱. $M_1, \ldots, M_n \in \cup \mathrm{ran}(p)$؛

۲. برای هر $i < n$، $M_i \in M_{i+1}$؛

۳. برای هر $\alpha \in \mathrm{supp}(p)$ اگر $\delta_{M_1} \leq \alpha \leq \delta_{M_n}$، آن‌گاه $1 \leq i \leq n$ وجود داشته باشد به طوری که $\delta_{M_i} = \alpha$.

لم ۲–۴–۶. *فرض کنید $\kappa > \theta$ کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و $M' \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\kappa}$. اگر $p \in \mathbb{P}_{\in}^{\mathcal{M}} \cap M'$، $\theta \in M'$ و $M = M' \cap H_\theta$، آن‌گاه*

$$p' = p \cup \{\langle \delta_M, \{M\} \rangle\} \in \mathbb{P}_{\in}^{\mathcal{M}}$$

اثبات. برهان لم ۲–۴–۶، شبیه برهان قسمت (۲) لم ۲–۴–۲، است. کافی است توجه کنیم $p \subseteq M$. ■

[1] Path

ملاحظه ۲–۴–۷. اگر $q \in \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$ و $M \in \cup\mathrm{ran}(q)$، آن‌گاه $q \cap M$ الزاماً شرط فورسینگ نیست.

فرض کنید $\mathrm{supp}(q) = \{\alpha, \beta, \gamma, \eta\}$، $q(\alpha) = \{N_۱\}$، $q(\beta) = \{N_۲\}$، $q(\gamma) = \{N_۳, N'_۳\}$ و $q(\eta) = \{M', M\}$ به طوری که

۱. $N_۱ \in N_۲ \in N'_۳ \in M'$

۲. $N_۱, N_۳ \in M$

در این صورت q شرط فورسینگ است، اما

$$q \cap M = \{\langle \alpha, \{N_۱\}\rangle, \langle \gamma, \{N_۳\}\rangle\}$$

شرط (۳) تعریف ۲–۴–۴ را برآورده نمی‌کند، زیرا $N_۲ \notin M$ و بنابراین در $q \cap M$ هیچ $\in$ـ مسیر از $N_۱$ به $N_۳$ وجود ندارد.

در مثال ملاحظهٔ ۲–۴–۷، از آنجا که H_θ می‌داند $N_۲ \cong \varphi_{M',M}(N_۲)$، پس همچنین می‌داند ساختار $N'_۲$ وجود دارد به طوری که با $\varphi_{M',M}(N_۲)$ یکریخت است و $N_۱ \in N'_۲ \in N_۳$. اکنون چون $M \prec H_\theta$، پس

$$M \models \exists N'_۲ \cong \varphi_{M',M}(N_۲)(N_۱ \in N'_۲ \in N_۳ = \varphi_{M',M}(N'_۳)).$$

ملاحظه ۲–۴–۸. لم ۲–۴–۹ بیان می‌کند گرچه $q \cap M$ ممکن است شرط فورسینگ نباشد، اما همیشه می‌توان با افزودن ساختارهایی مانند $N'_۲$ از ملاحظهٔ ۲–۴–۷، آن را تبدیل به شرط فورسینگ کرد.

لم ۲–۴–۹. [۲۰، لم ۲.۸] *فرض کنید* $M \in q \in \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$. $\hat{q} \in \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in} \cap M$ *وجود دارد به طوری که شرایط زیر برقرار است.*

۱. $\mathrm{supp}(\hat{q}) = \mathrm{supp}(q) \cap M$

۲. $q \cap M \subseteq \hat{q}$

۳. *اگر* $\alpha \in \mathrm{supp}(q)$، $N \in q(\alpha)$ *و* $N' \in \hat{q}(\alpha)$، *آن‌گاه* $N \cong N'$

۴. q *و* $\hat{q}$ *سازگارند.*

قضیه ۲–۴–۱۰. [۲۰، لم ۲.۳] *مفهوم فورسینگ* $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$ *به طور قوی سره است.*

اثبات. فرض کنید $\theta > \kappa$ کاردینال به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in} \in M' \in \mathcal{E}_{\aleph_\circ,\kappa}$. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $M = M' \cap H_\theta$، آنگاه $p' = p \cup \{\langle \delta_M, \{M\}\rangle\}$ شرط به طور قوی $(M', \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in})$ـ ژنریک است. لم ۲–۴–۶ نتیجه می‌دهد $p' \in \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$. فرض کنید $q \leq p'$ دلخواه و $D \subseteq \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in} \cap M'$ چگال باز باشد. باید نشان دهیم q با عضوی از D سازگار است. چون $M \in q$، لذا $\hat{q} \in \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in} \cap M$ وجود دارد به طوری که شرایط (۱)-(۴) لم ۲–۴–۹ را برآورده کند. فرض کنید W مجموعهٔ همهٔ $\in$ـ مسیرهای $w = \langle N^w_\circ, \dots, N^w_l \rangle$ در $\cup(\operatorname{ran}(q) \cup \operatorname{ran}(\hat{q}))$ باشد به طوری که $N^w_l \in q(\delta_M)$. اکنون $q{\restriction}M$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $\alpha \in \operatorname{supp}(q) \cap M$ فرض کنید

$$q{\restriction}M(\alpha) = \{\varphi_{N^w_l, M}(N^w_i) \colon (w \in W) \wedge (\circ \leq i < l)\}.$$

در این صورت $q{\restriction}M \in \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in} \cap M$ و $\hat{q} \subseteq q{\restriction}M$. اکنون فرض کنید $r \in D$ گسترش $q{\restriction}M$ باشد. فرض کنید

$$s = r \cup q \cup \{\langle \delta_K, \{\varphi_{M,N}(K)\}\rangle \colon (N \in q(\delta_M)) \wedge (K \in \cup\operatorname{ran}(r))\}.$$

s شرط فورسینگ است و r و q را گسترش می‌دهد. بنابراین D زیر p' پیش‌چگال، و p' شرط به طور قوی $(M', \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in})$ـ ژنریک است. چون $p \in \mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in} \cap M'$ شرط دلخواه است، پس $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$ فورسینگ به طور قوی سره است. ■

قضیهٔ ۲–۴–۱۰، نتیجه می‌دهد فورسینگ با $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$، $\aleph_1$ را حفظ می‌کند. در ادامه دو خصوصیت مهم دیگر $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$ را یادآوری می‌کنیم.

لم ۲–۴–۱۱. [۲۰، لم ۱.۴] $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$، $(2^{\aleph_\circ})^+$–c.c. *است.*

گزاره ۲–۴–۱۲. [۲۰، لم ۲.۴] $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$، CH *را اجبار می‌کند.*

فصل سوم:

الحاق زیرمجموعه‌های فراژنریک ω_2

۳–۱ مقدمه

در ۲۰۱۷، سوال زیر توسط گیتیک مطرح شده است.

سوال ۳–۱–۱. فرض کنید GCH برقرار و $\kappa \geq \aleph_2$ کاردینال است. آیا فورسینگی که در شرایط زیر صدق کند وجود دارد؟

۱. کاردینال‌ها را حفظ کند؛

۲. GCH را حفظ کند؛

۳. در گسترش ژنریک ساختار زمینه، مجموعهٔ $A \subseteq \kappa$ از کاردینالیتهٔ κ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعهٔ شمارای نامتناهی $x \in \mathcal{P}(\kappa) \cap V$، $x \cap A \neq \emptyset$ و $x \setminus A \neq \emptyset$.

در سوال ۲–۲–۲۹ دیدیم که برای هر کاردینال $\kappa \geq \aleph_0$،

$$\mathbb{P}_\kappa = \{p : \kappa \longrightarrow 2 : |p| < \aleph_0\}$$

وجود مجموعهٔ A خواسته شده در سوال ۳–۱–۱ را اجبار می‌کند. اما لم ۳–۱–۲ نشان خواهد داد که $\mathbb{P}_\kappa$ برای $\kappa \geq \aleph_2$، فرضیهٔ پیوستار را حفظ نمی‌کند.

لم ۳–۱–۲. *$\mathbb{P}_\kappa$ اجبار می‌کند* $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

اثبات. کافی است نشان دهیم برای هر κ، $\mathbb{P}_\kappa \cong \mathrm{Add}(\aleph_0, \kappa)$. ابتدا تابع دوسویی $f : \omega \times \kappa \longrightarrow \kappa$ را در نظر می‌گیریم. اکنون $\pi : \mathrm{Add}(\aleph_0, \kappa) \longrightarrow \mathbb{P}_\kappa$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $p \in \mathrm{Add}(\aleph_0, \kappa)$،

$$\pi(p) \colon f''\mathrm{supp}(p) \to 2$$

به طوری که

$$\pi(p)(f(\langle n, \alpha \rangle)) = p(\langle n, \alpha \rangle).$$

برای هر کاردینال نامتناهی κ، $\pi \colon \mathrm{Add}(\aleph_0, \kappa) \to \mathbb{P}_\kappa$ یکریختی بین دو مجموعهٔ جزئا مرتب است، لذا برای $\kappa \geq \aleph_2$، فرضیهٔ پیوستار نقض می‌شود. ■

در این فصل، از فورسینگ با ماتریس‌های زیرساختارهای مقدماتی شمارای تودورچویچ، که در تعریف ۲–۴–۴ آمده است، به عنوان شرط جانبی استفاده می‌کنیم تا به سوال ۳–۱–۱ برای $\kappa = \aleph_2$ پاسخ دهیم. در واقع، فصل ۳، برهانی برای قضیه زیر ارائه می‌دهد.

قضیه ۳–۱–۳. (GCH) *یک گسترش ژنریک از ساختار زمینه، با استفاده از فورسینگ سره وجود دارد به طوری که کاردینال‌ها و* GCH *را حفظ می‌کند، و در آن گسترش ژنریک، مجموعهٔ* $A \subseteq \omega_2$ *از کاردینالیتهٔ* $\aleph_2$ *وجود دارد به طوری که برای هر مجموعهٔ شمارای نامتناهی* $x \subseteq \omega_2$ *از ساختار زمینه،* $x \cap A$ *و* $x \setminus A$ *ناتهی باشند.*

ملاحظه ۳–۱–۴. از قضیهٔ ۳–۱–۳ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ A فراژنریک است، یعنی هر زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی A یا $\omega_2 \setminus A$، روی ساختار زمینه، کوهن ژنریک است.

فرض کنید در $V[G]$، $y \subseteq A$ و $z \subseteq \omega_2 \setminus A$ شمارای نامتناهی باشند. اگر $y, z \in V$، آنگاه باید $y \setminus A$ و $z \cap A$ ناتهی باشند که غیرممکن است. بنابراین طبق قرارداد ۸، y و z کوهن ژنریک هستند.

در بخش ۳–۲ برخی از تعاریف پایه و نتایج مرتبط با فورسینگ به طور قوی سره را یادآوری می‌نماییم. همچنین فورسینگ $\in$ـ فورریزی ماتریسی تودورچویچ را که در بخش ۲–۴ آمده، مرور می‌کنیم. سپس در بخش ۳–۳ برهان قضیهٔ ۳–۱–۳ را ارائه خواهیم کرد.

۳–۲ پیش‌نیازها

در این فصل مفهوم قوی‌تری از فورسینگ سره به کار می‌بریم که فورسینگ به طور قوی سره نامیده می‌شود، در بخش ۲–۳، تعاریف ۲–۳–۷ و ۲–۳–۸ معرفی شده است و در تعریف ۳–۲–۱ یادآوری می‌شود.

تعریف ۳–۲–۱. فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ و M مجموعه باشد.

۱. گوییم $p \in \mathbb{P}$ به طور قوی $(M, \mathbb{P})$ـ ژنریک است، هرگاه هر مجموعهٔ D که در مجموعهٔ جزئا مرتب $M \cap \mathbb{P}$ چگال باز است، زیر p در $\mathbb{P}$ پیش‌چگال باشد.

۲. فورسینگ $\mathbb{P}$ به طور قوی سره است، هرگاه برای هر کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ θ، مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران از زیرساختارهای مقدماتی شمارای $M \prec H_\theta$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $p \in M \cap \mathbb{P}$، آنگاه شرط به طور قوی $(M, \mathbb{P})$ـ ژنریک زیر p وجود داشته باشد.

لم ۳-۲-۲ معادل‌سازی برای شرط‌های به طور قوی $(M,\mathbb{P})$ـ ژنریک ارائه می‌کند.

لم ۳-۲-۲. [۲۲، گزاره ۱۵.۲] *فرض کنید $\mathbb{P},\theta$ و M مانند در تعریف ۳-۲-۱ باشند و $p\in\mathbb{P}$. در این صورت p به طور قوی $(M,\mathbb{P})$ـ ژنریک است اگر و تنها اگر*

(*) *برای هر $q\leq p$، $q\restriction M\in\mathbb{P}\cap M$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $r\in\mathbb{P}\cap M$ اگر $r\leq q\restriction M$، آن‌گاه r و q در $\mathbb{P}$ سازگار باشند.*

در فصل‌های ۱ و ۲ گفته شد روش فورسینگ با شرط‌های جانبی توسط تودورچویچ برای گرفتن نتایج مختلفی از اصل فورسینگ سره[1] (PFA) معرفی شد. او همچنین تعمیمی از این فورسینگ معرفی کرد که در آن، شرط‌های جانبی به جای اینکه زنجیر زیرساختارهای مقدماتی شمارا باشند، به شکل ماتریس (نه لزوما کامل) هستند. در این فصل برای اثبات قضیهٔ ۳-۱-۳، از شرط‌های فورسینگ ماتریسی تودورچویچ به عنوان شرط‌های جانبی در فورسینگی که ارائه می نماییم، استفاده می‌کنیم.

خوش ترتیبی $\trianglelefteq$ روی H_{ω_2} در نظر می‌گیریم و در طول این فصل، $M\prec H_{\omega_2}$ نشان‌دهندهٔ این است که $\langle M,\in,\trianglelefteq\cap M^2\rangle$ زیرساختار مقدماتی شمارای $\langle H_{\omega_2},\in,\trianglelefteq\rangle$ است. موارد زیر را یادآوری می‌کنیم

۱. مجموعهٔ $\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}=\{M\in[H_{\omega_2}]^{\aleph_0}:M\prec H_{\omega_2}\}$ زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران $[H_{\omega_2}]^{\aleph_0}$ است.

۲. برای هر $M,N\in\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}$، $M\cong N$ اگر و تنها اگر $\langle M,\in\rangle$ با $\langle N,\in\rangle$ یکریخت باشد. این یکریختی منحصر به فرد را با $\varphi_{M,N}:M\xrightarrow{\cong}N$ نشان می‌دهیم.

۳. برای هر $M\in\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}$، اردینال شمارای $M\cap\omega_1$ را با δ_M و $\sup(M\cap\omega_2)$ را با δ'_M نمایش می‌دهیم.

[1] Proper Forcing Axiom

ملاحظه ۳–۲–۳. اگر $p\colon \omega_1 \longrightarrow H_{\omega_2}$ تابع تعریف‌شده در ۲–۴–۴ باشد، آنگاه بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم:

۱. $p \subset \mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}$،

۲. $\mathrm{supp}(p) = \{\delta_M : M \in p\}$ و

۳. $p(\delta) = \{M \in p\colon \delta_M = \delta\}$.

اکنون آماده‌ایم فرم طبیعی[1] و ساده‌تری از فورسینگ ماتریسی $\in$ـ فروریزی تودورچویچ را که در تعریف ۲–۴–۴، آمده است، معرفی کنیم.

تعریف ۳–۲–۴. فورسینگ $\mathbb{Q}$ شامل همهٔ مجموعه‌های متناهی $p \subset \mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}$ است که در شرایط زیر صدق کنند:

۱. برای هر $M, N \in p$ اگر $\delta_M = \delta_N$، آنگاه $M \cong N$؛

۲. اگر $M \in p$ و $\delta_M < \delta \in \mathrm{supp}(p)$، آنگاه $N \in p(\delta)$ وجود دارد به طوری که $M \in N$.

برای هر $p, q \in \mathbb{Q}$، گوییم $q \leq p$ اگر و تنها اگر $p \subseteq q$.

ملاحظه ۳–۲–۵. لازم به ذکر است فورسینگ $\mathbb{Q}$ معرفی شده در ۳–۲–۴، با فورسینگ $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$ از [۲۰] که در تعریف ۲–۴–۴ آمده است، معادل است. کافی است در تعریف ۲–۴–۴ قرار دهیم $\theta = \omega_2$، و از مفاهیم $\mathrm{supp}(p)$ و $p(\delta)$ به صورتی که در ملاحظهٔ ۳–۲–۳ آمده است استفاده کنیم. در این صورت $p \in \mathbb{Q}$ اگر و تنها اگر تابع با حمایت متناهی[2] $p\colon \omega_1 \longrightarrow H_{\omega_2}$ باشد که شرایط (۱)-(۳) تعریف ۲–۴–۴ را برآورده می‌کند.

در لم ۳–۲–۶ برخی خواص $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$ که برای $\mathbb{Q}$ نیز صدق می‌کنند، را یادآوری می‌کنیم.

[1] Canonical
[2] Finite Support

لم ۳–۲–۶. [۲۰، *لم‌های* ۲.۳، ۱.۴ *و* ۲.۴] (GCH) *فورسینگ* $\mathbb{Q}$ *در تعریف* ۳–۲–۴، *به طور قوی سره است،* $\aleph_2-$c.c. *را برآورده و* GCH *را حفظ می‌کند.*

اثبات. برهان لم ۳–۲–۶، تکرار برهان لم‌های ۲–۴–۱۰، ۲–۴–۱۱ و گزارهٔ ۲–۴–۱۲ بخش ۲–۴ است، که در طول این فصل نیز در حین اثبات همین احکام برای فورسینگ تعریف شده در ۳–۳–۱، دوباره اثبات خواهند شد. لازم به ذکر است در لم ۲–۴–۱۱ بیان شده $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{\in}$، $(2^{\aleph_0})^+-$c.c. است که نتیجه می‌دهد $\mathbb{Q}$ تحت GCH، $\aleph_2-$c.c. خواهد بود. ■

لم ۳–۲–۷. *فرض کنید* $\omega_2 > \theta$ *کاردینال منتظم باشد و* $M' \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$. *اگر* $M' \cap H_{\omega_2} = M$، *آن‌گاه* $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}$ *و* $\delta_{M'} = \delta_M$.

اثبات. این لم، حالت خاصی از لم ۲–۴–۲ است که با قرار دادن $\theta = \aleph_2$ در برهان آن لم به دست می‌آید. ■

۳–۳ برهان قضیه ۳–۱–۳

در این بخش، با معرفی فورسینگ به طور قوی سره که کاردینال‌ها و GCH را حفظ، و مجموعهٔ $A \subseteq \omega_2$ با خواص خواسته‌شده، الحاق می‌کند، قضیهٔ ۳–۱–۳ را اثبات می‌کنیم. ابتدا با معرفی فورسینگ شروع می‌کنیم.

تعریف ۳–۳–۱. هر دوتایی $p = \langle \mathcal{M}_p, f_p \rangle$ شرط فورسینگ $\mathbb{P}$ است که درآن:

(i) $\mathcal{M}_p \in \mathbb{Q}$؛

(ii) $f_p : \omega_2 \longrightarrow 2$ تابع جزئی است و

(iii) اگر $M \in \mathcal{M}_p$، آن‌گاه برای هر $N \in \mathcal{M}_p(\delta_M)$ و $\alpha \in (\mathrm{dom}(f_p) \cap M)$،

۱. $\varphi_{M,N}(\alpha) \in \mathrm{dom}(f_p)$

۲. $f_p(\varphi_{M,N}(\alpha)) = f_p(\alpha)$

برای $p, q \in \mathbb{P}$ گوییم $q \le p$، هرگاه $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q$ و $f_p \subseteq f_q$.

ملاحظهٔ ۳–۳–۲ و لم ۳–۳–۳ نقش کلیدی در اثبات به طور قوی سره بودن $\mathbb{P}$ ایفا می‌کنند.

ملاحظه ۳–۳–۲. اگر $q \in \mathbb{P}$ و $M \in \mathcal{M}_q$، آن‌گاه

$$\mathcal{M}_q \restriction \delta_M = \{N \in \mathcal{M}_q \colon \delta_N < \delta_M\} \in \mathbb{Q}.$$

اثبات. اگر $N_۱$ و $N_۲$ در $\mathcal{M}_q \restriction \delta_M$ باشند و $\delta_{N_۱} = \delta_{N_۲}$، آن‌گاه $N_۱, N_۲ \in \mathcal{M}_q$ و $\delta_{N_۱} = \delta_{N_۲}$. بنابراین $N_۱ \cong N_۲$. فرض کنید $\alpha, \beta \in \operatorname{supp}(\mathcal{M}_q \restriction \delta_M)$، $\alpha < \beta$ و $N_۱ \in (\mathcal{M}_q \restriction \delta_M)(\alpha)$. چون $\mathcal{M}_q$ شرط فورسینگ $\mathbb{Q}$ است، پس $N_۲ \in \mathcal{M}_q(\beta)$ وجود دارد به طوری که $N_۱ \in N_۲$. از آنجا که $\delta_{N_۲} = \delta_{N_۱} < \delta_M$، لذا $N_۲ \in \mathcal{M}_q \restriction \delta_M$. ■

لم ۳–۳–۳. *گیریم $\omega_۲ < \theta$ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و $M' \in \mathcal{E}_{\aleph_۰, \theta}$. همچنین فرض کنید $p = \langle \mathcal{M}_p, f_p \rangle \in \mathbb{P}$ به طوری که $M' \cap H_{\omega_۲} = M \in \mathcal{M}_p$. در این صورت $\hat{\mathcal{M}}_p$ و $\hat{f}_p$ وجود دارند به طوری که در شرایط زیر صدق می‌کنند:*

۱. $\hat{\mathcal{M}}_p \in \mathbb{Q} \cap M'$.

۲. $\operatorname{supp}(\hat{\mathcal{M}}_p) = \operatorname{supp}(\mathcal{M}_p) \cap M'$.

۳. $\mathcal{M}_p \cap M' \subseteq \hat{\mathcal{M}}_p$.

۴. *اگر* $\alpha \in \operatorname{supp}(\hat{\mathcal{M}}_p), N_۱ \in \mathcal{M}_p(\alpha)$ *و* $N_۲ \in \hat{\mathcal{M}}_p(\alpha)$*، آن‌گاه* $N_۱ \cong N_۲$.

۵. $\hat{f}_p \supseteq f_p \restriction M'$.

۶. $\hat{p} = \langle \hat{\mathcal{M}}_p, \hat{f}_p \rangle \in \mathbb{P} \cap M'$.

۷. *$\hat{p}$ و p سازگارند.*

اثبات. با توجه به ملاحظات ۳–۳–۲، ۲–۴–۷ و لم ۲–۴–۹، نتیجه می‌گیریم اگر $\delta \in \operatorname{supp}(\mathcal{M}_p) \cap M'$ و $N \in \mathcal{M}_p(\delta)$، آن‌گاه $N' \in M$ وجود دارد به طوری که $N \cong N'$. بنابراین با توجه به زیرساختار مقدماتی بودن M، $\hat{\mathcal{M}}_p$ وجود دارد به طوری که در شروط (۱)-(۴) صدق می‌کند. علاوه بر این، $\hat{\mathcal{M}}_p$ و $\mathcal{M}_p$ در $\mathbb{Q}$

سازگارند. همچنین اگر فرض کنیم $\hat{f}_p = f_p\restriction M'$، آنگاه (۵) نیز برقرار خواهد بود. اکنون باید نشان دهیم $\hat{p} = \langle \hat{\mathcal{M}}_p, \hat{f}_p\rangle$ شرط فورسینگ است. از آنجا که $\hat{\mathcal{M}}_p \in \mathbb{Q}$ و $\hat{f}_p\colon \omega_۲ \longrightarrow ۲$ تابع جزئی است، کافی است نشان دهیم اگر $N_۱, N_۲ \in \hat{\mathcal{M}}_p$، $\delta_{N_۱} = \delta_{N_۲}$ و $\alpha \in \operatorname{dom}(f_p\restriction M') \cap N_۱$، آنگاه

$\varphi_{N_۱,N_۲}(\alpha) \in \operatorname{dom}(f_p\restriction M')$ و $f_p(\varphi_{N_۱,N_۲}(\alpha)) = f_p(\alpha)$.

ساختارهای یکریخت $N_۱, N_۲$ و α را همانطور که خواسته شده است در نظر می‌گیریم. توجه کنید $\alpha \in M'$. چون $N_۱, N_۲ \in M'$، لذا $\varphi_{N_۱,N_۲} \in M'$، و بنابراین $\varphi_{N_۱,N_۲}(\alpha) \in M'$. اکنون $\alpha \in N_۱ \in \hat{\mathcal{M}}_p$ نتیجه می‌دهد x، $N'_۱$ و $M'_۱$ وجود دارند به طوری که:

۱. $N'_۱ \in \mathcal{M}_p(\delta_{N_۱})$،

۲. $x \in N'_۱ \in M'_۱ \in \mathcal{M}_p(\delta_M)$،

۳. $N_۱ = \varphi_{M'_۱,M}(N'_۱)$ و

۴. $\alpha = \varphi_{M'_۱,M}(x)$.

از آنجا که $p \in \mathbb{P}$، $\alpha \in \operatorname{dom}(f_p) \cap M$ و $M \cong M'_۱ \in \mathcal{M}_p$، لذا با توجه به شرط (iii) تعریف ۳–۳–۱،

$x \in \operatorname{dom}(f_p)$ و $f_p(x) = f_p(\alpha)$.

همچنین $\varphi_{N_۱,N_۲}(\alpha) \in N_۲ \in \hat{\mathcal{M}}_p$ نتیجه می‌دهد y، $N'_۲$ و $M'_۲$ وجود دارند به طوری که:

۵. $N'_۲ \in \mathcal{M}_p(\delta_{N_۲})$،

۶. $y \in N'_۲ \in M'_۲ \in \mathcal{M}_p(\delta_M)$،

۷. $N_۲ = \varphi_{M'_۲,M}(N'_۲)$ و

۸. $\varphi_{N_۱,N_۲}(\alpha) = \varphi_{M'_۲,M}(y)$.

همچنین چون $M'_۲ \cong M'_۱$، پس $N''_۱ \in M'_۲$ و $z \in N''_۱$ وجود دارند به طوری که

$z = \varphi_{M'_1,M'_2}(x)$ و $N''_1 = \varphi_{M'_1,M'_2}(N'_1)$.

چون N_1 و N_2 یکریخت هستند، کپی‌های یکریختی آن‌ها نیز یکریخت هستند، بنابراین

$$y = \varphi_{N''_1,N'_2}(z) = \varphi_{N''_1,N'_2}\varphi_{N'_1,N''_1}(x) = \varphi_{N'_1,N'_2}(x).$$

اکنون از آنجا که $p \in \mathbb{P}$، $x \in \operatorname{dom}(f_p) \cap N'_1$ و $N'_1 \cong N'_2 \in \mathcal{M}_p$، لذا با توجه به شرط (iii) تعریف ۳–۳–۱،

$y \in \operatorname{dom}(f_p)$ و $f_p(y) = f_p(x)$.

بنابراین از آنجا که $p \in \mathbb{P}$، $y \in \operatorname{dom}(f_p) \cap M'_2$ و $M'_2 \cong M \in \mathcal{M}_p$، لذا با توجه به قسمت (۸) و شرط (iii) تعریف ۳–۳–۱،

$$\varphi_{N_1,N_2}(\alpha) = \varphi_{M'_2,M}(y) \in \operatorname{dom}(f_p) \text{ و}$$
$$f_p(\varphi_{N_1,N_2}(\alpha)) = f_p(\varphi_{M'_2,M}(y)) = f_p(y) = f_p(x) = f_p(\alpha)$$

و نتیجهٔ لازم به دست می‌آید. برای اثبات سازگاری p و $\hat{p}$ ادعای زیر را مطرح می‌کنیم.

ادعا ۳–۳–۴. $\langle \hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p, f_p \rangle$ شرط فورسینگ است و p و $\hat{p}$ را گسترش می‌دهد.

اثبات. ابتدا لازم است توجه کنیم $\hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p$ زیرمجموعهٔ متناهی $\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}$ است، $\mathcal{M}_p \cap M \subseteq \hat{\mathcal{M}}_p$ و $\hat{\mathcal{M}}_p \in M$. بنابراین و با توجه به موارد (۱) تا (۴) لم ۳–۳–۳، نتیجه می‌شود اگر $N_1, N_2 \in \hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p$ و $\delta_{N_1} = \delta_{N_2}$، آنگاه یکی از حالات زیر برقرار است.

الف) $\delta_{N_1} < \delta_M$. در این حالت اگر N_1 و N_2 هر دو متعلق به $\hat{\mathcal{M}}_p$ و یا هر دو متعلق به $\mathcal{M}_p$ باشند، از آنجا که $\hat{\mathcal{M}}_p, \mathcal{M}_p \in \mathbb{Q}$، لذا $N_1 \cong N_2$. اگر یکی از آن‌ها متعلق به $\hat{\mathcal{M}}_p \setminus \mathcal{M}_p$ و دیگری متعلق $\mathcal{M}_p \setminus \hat{\mathcal{M}}_p$ باشند، قسمت (۴) لم ۳–۳–۳ نتیجه می‌دهد $N_1 \cong N_2$.

ب) $\delta_{N_1} \geq \delta_M$. در این حالت الزاماً هر دو متعلق به $\mathcal{M}_p$ هستند و بنابراین $N_1 \cong N_2$.

اکنون فرض کنید $\alpha, \beta \in \operatorname{supp}(\hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p)$، $N_1 \in (\hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p)(\alpha)$ و $\alpha < \beta$. از آنجا که β به $\operatorname{supp}(\hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p)$ تعلق دارد، لذا $N_2 \in \hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p(\beta)$ وجود دارد. سه حالت زیر قابل بررسی است.

۱. $\beta < \delta_M$. در این صورت قسمت‌های (۲) و (۴) لم ۳-۳-۳ نتیجه می‌دهند $N_2 \in \mathcal{M}_p$ و $N_2' \in \hat{\mathcal{M}}_p$ وجود دارند به طوری که $N_2' \cong N_2$. حال اگر $N_1 \in \hat{\mathcal{M}}_p$، آنگاه $N_2'' \in \hat{\mathcal{M}}_p$ وجود دارد به طوری که $N_2'' \cong N_2'$ و $N_1 \in N_2''$. اگر $N_1 \in \mathcal{M}_p$، آنگاه $N_2'' \in \mathcal{M}_p$ وجود دارد به طوری که $N_2'' \cong N_2$ و $N_1 \in N_2''$.

۲. $\beta = \delta_M$. در این صورت چون طبق قسمت (۱) لم ۳-۳-۳ $\hat{\mathcal{M}}_p \subseteq M$، پس $N_2 \in \mathcal{M}_p$. اگر $N_1 \in \hat{\mathcal{M}}_p$، آنگاه قسمت (۱) لم ۳-۳-۳ نتیجه می‌دهد $N_1 \in M$. اگر $N_1 \in \mathcal{M}_p$، آنگاه $N_2'' \in \mathcal{M}_p(\delta_M)$ وجود دارد به طوری که $N_2'' \cong N_2$ و $N_1 \in N_2''$.

۳. $\beta > \delta_M$. در این صورت $N_2 \in \mathcal{M}_p$. اگر $N_1 \in \mathcal{M}_p$، آنگاه $N_2'' \in \mathcal{M}_p$ وجود دارد به طوری که $N_2'' \cong N_2$ و $N_1 \in N_2''$. اگر $N_1 \in \hat{\mathcal{M}}_p$، آنگاه $N_2'' \in \mathcal{M}_p$ وجود دارد به طوری که $N_2'' \cong N_2$ و $M \in N_2''$. از آنجا که طبق قسمت (۱) لم ۳-۳-۳، $N_1 \in M$ بنابراین $N_1 \in N_2''$.

بنابراین $\hat{\mathcal{M}}_p \cup \mathcal{M}_p \in \mathbb{Q}$. فرض کنید $N \cong N'$ و $\alpha \in \mathrm{dom}(f_p) \cap N$ داده شده است. اگر N و N' متعلق به $\mathcal{M}_p$ باشند، چون p شرط فورسینگ است،

$$\varphi_{N,N'}(\alpha) \in \mathrm{dom}(f_p) \text{ و } f_p(\varphi_{N,N'}(\alpha)) = f_p(\alpha).$$

اگر N و N' متعلق به $\hat{\mathcal{M}}_p$ باشند، چون $\hat{f}_p = f_p \restriction M'$، از قسمت (۶) لم ۳-۳-۳ نتیجه می‌شود

$$\varphi_{N,N'}(\alpha) \in \mathrm{dom}(f_p) \text{ و } f_p(\varphi_{N,N'}(\alpha)) = f_p(\alpha).$$

اگر $N \in \mathcal{M}_p \setminus \hat{\mathcal{M}}_p$ و $N' \in \hat{\mathcal{M}}_p \setminus \mathcal{M}_p$، آنگاه مشابه برهان قسمت (۶) لم ۳-۳-۳،

$$\varphi_{N,N'}(\alpha) \in \mathrm{dom}(f_p) \text{ و } f_p(\varphi_{N,N'}(\alpha)) = f_p(\alpha).$$

بنابراین حکم برقرار است. ■

لم ۳-۳-۵. [۲۰] *اگر N_0 و N_1 زیرساختارهای مقدماتی و شمارای H_{ω_2} باشند که با هم یکریخت هستند و $\beta \in N_0 \cap N_1 \cap \omega_2$، آنگاه برای هر $\xi < \beta$، $\xi \in N_0$ اگر و تنها اگر $\xi \in N_1$.*

اثبات. برای هر $\xi \in \omega_2$، تابع یک به یک از ξ به توی ω_1 وجود دارد. بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم N_0 و N_1 شامل خانوادهٔ یکسانی از نگاشت‌های $\langle e_\gamma : \gamma \in \omega_2\rangle$ هستند جایی که $e_\gamma : \gamma \longrightarrow \omega_1$ تابع یک به یک است. گیریم $\beta < \xi$، پس $\xi \in N_0$ اگر و تنها اگر

$$e_\beta(\xi) \in N_0 \cap \omega_1 = \delta_{N_0} = \delta_{N_1} = N_1 \cap \omega_1$$

اگر و تنها اگر $e_\beta^{-1}(e_\beta(\xi)) \in N_1$ اگر و تنها اگر $\xi \in N_1$. ■

برای ادامهٔ برهان ۳–۱–۳، تعریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۳–۳–۶. گیریم X مجموعه باشد. مجموعهٔ متناهی

$$w = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$$

را $\in$ـ مسیر در X گوییم، اگر $x_i \in x_{i+1}$ برای هر $1 \leq i \leq n-1$.

لم ۳–۳–۷، وجود شرط‌های به طور قوی $(M, \mathbb{P})$ـ ژنریک طبیعی را تضمین می‌کند.

لم ۳–۳–۷. *گیریم $\theta > \omega_2$ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و فرض کنید $M' \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$. اگر $p = \langle \mathcal{M}_p, f_p\rangle \in \mathbb{P}$، $M' \cap H_{\omega_2} = M \in \mathcal{M}_p$ و $f_p \in M'$، آن‌گاه p شرط به طور قوی $(M', \mathbb{P})$ـ ژنریک است.*

اثبات. گیریم D زیرمجموعهٔ چگال باز $\mathbb{P} \cap M'$ است و $q = \langle \mathcal{M}_q, f_q\rangle \leq p$. باید نشان دهیم q با عضوی از D سازگار است. فرض کنید $\hat{\mathcal{M}}_q$ همانند در لم ۳–۳–۳ باشد. فرض کنید W مجموعه همه $\in$ـ مسیرهای $w = \{N_0^w, \ldots, N_l^w\}$ در $\hat{\mathcal{M}}_q \cup \mathcal{M}_q$ باشد که در آن $N_l^w \in \mathcal{M}_q(\delta_M)$. مجموعهٔ

$$\mathcal{M}_{q\restriction M'} = \{\varphi_{N_l^w, M}(N_i^w) : (w = \langle N_0^w, \ldots, N_l^w\rangle \in W) \wedge (i < l)\}$$

را در نظر بگیرید. لذا

$\hat{\mathcal{M}}_q \subseteq \mathcal{M}_{q\restriction M'}$ و $\mathrm{supp}(\mathcal{M}_{q\restriction M'}) = \mathrm{supp}(\mathcal{M}_q) \cap M'$.

همانند قضیهٔ ۲–۴–۱۰، $\mathcal{M}_{q\restriction M'} \in \mathbb{Q} \cap M$. فرض کنید N_1 و N_2 متعلق به $\mathcal{M}_{q\restriction M'}$ باشند به طوری که $\delta_{N_1} = \delta_{N_2}$. چون این دو ساختار، کپی‌های یکریختی[1] از دو ساختار N_1' و N_2' متعلق به $\hat{\mathcal{M}}_q \cup \mathcal{M}_q$

[1] Isomorphic Copy

هستند، طبق ادعای ۳–۳–۴، $\delta_{N'_1} = \delta_{N'_2}$ نتیجه می‌دهد $N'_1 \cong N'_2$. بنابراین کپی‌های یکریختی آن‌ها نیز یکریخت هستند، و قسمت (۱) تعریف ۳–۲–۴ برقرار است. برای بررسی قسمت (۲) تعریف ۳–۲–۴، گیریم $N_1 \in \mathcal{M}_{q\restriction M'}(\alpha)$ و $\alpha < \delta$ برای $\delta \in \operatorname{supp}(\mathcal{M}_{q\restriction M'})$. از آنجا که $\delta < \delta_M$ در $\operatorname{supp}(\mathcal{M}_p)$ است، پس مسیر $w = \langle N^w_0, \ldots, N^w_l \rangle$ در $\mathcal{M}_p$ وجود دارد به طوری که $N^w_l \cong M$ و $N_1 = \varphi_{N^w_l,M}(N^w_i) \in \varphi_{N^w_l,M}(N^w_j)$ برای $i < j < l$ به طوری که $\delta_{\varphi_{N^w_l,M}(N^w_j)} = \delta_{N^w_j} = \delta$.

اکنون برهانی همانند برهان لم ۳–۳–۳ نتیجه می‌دهد

$$q\restriction M' = \langle \mathcal{M}_{q\restriction M'}, f_q\restriction {\delta'}_{M'} \rangle \in \mathbb{P} \cap M'.$$

چون $D \subseteq \mathbb{P} \cap M'$ چگال باز است، پس $r \in D \cap M'$ وجود دارد به طوری که $r \leq q\restriction M'$. اکنون $\bar{q} = \langle \bar{\mathcal{M}}, \bar{f} \rangle$ را تعریف می‌کنیم که در آن

$$\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_r \cup \mathcal{M}_q \cup \{\varphi_{M,N}(K) : (N \in \mathcal{M}_q(\delta_M)) \wedge (K \in \mathcal{M}_r)\}$$

و

$$\bar{f} = f_r \cup f_q \cup \{\langle \varphi_{N',N''}(\alpha), f_r(\alpha) \rangle : (\alpha \in \operatorname{dom}(f_r)) \wedge (N', N'' \in \bar{\mathcal{M}}) \wedge (\delta_{N'} = \delta_{N''})\}.$$

ادعا ۳–۳–۸. $\bar{f} : \omega_2 \longrightarrow 2$ تابع جزئی است.

اثبات. فرض کنید $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(\bar{f})$ و $x_1 = x_2$. توجه کنید

$f_q\restriction {\delta'}_M \subseteq f_r$ و $\operatorname{dom}(f_r) \subseteq {\delta'}_M$.

بنابراین کافی است دو حالت زیر را در نظر بگیریم.

۱. برای $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{dom}(f_r)$ قرار دهید $x_1 = \varphi_{N'_0,N''_0}(\alpha_1)$ و $x_2 = \varphi_{N'_1,N''_1}(\alpha_2)$ جایی که $\delta_{N'_0} = \delta_{N''_0}$ و $\delta_{N'_1} = \delta_{N''_1}$. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $\delta_{N''_0} = \delta_{N''_1}$. زیرا در غیر این صورت اگر $\delta_{N''_0} < \delta_{N''_1}$، آنگاه $N'_2, N''_2 \in \bar{\mathcal{M}}(\delta_{N''_1})$ وجود دارند به طوری که $N'_0 \in N'_2$، $N''_0 \in N''_2$ و $\varphi_{N'_2,N''_2}\restriction N'_0 = \varphi_{N'_0,N''_0}$. لذا $x_1 = \varphi_{N'_2,N''_2}(\alpha_1)$، جایی که $\delta_{N''_2} = \delta_{N''_1}$. لذا می‌توانیم (N'_0, N''_0) را با (N'_2, N''_2) جایگزین کنیم. پس $\alpha_2 = \varphi_{N'_0,N'_1}(\alpha_1)$، و بنابراین

$$\bar{f}(x_1) = f_r(\alpha_1) = f_r(\varphi_{N'_0,N'_1}(\alpha_1)) = f_r(\alpha_2) = \bar{f}(x_2).$$

۲. $x_۱ \in \mathrm{dom}(f_r)$ و $x_۲ = \varphi_{N'_\circ, N''_\circ}(\alpha)$ برای $\alpha \in \mathrm{dom}(f_r)$. در این حالت نیز می‌توانیم فرض کنیم $N' \in \bar{\mathcal{M}}(\delta_{N''_\circ})$ وجود دارد به طوری که:

$$x_۱ \in N' \text{ و } x_۲ = \varphi_{N', N''_\circ}(x_۱).$$

بنابراین

$$\bar{f}(x_۱) = f_r(x_۱) = f_r(\varphi_{N', N''_\circ}(x_۱)) = f_r(x_۲) = \bar{f}(x_۲).$$

ادعا ۳–۳–۹. $\bar{\mathcal{M}} \in \mathbb{Q}$.

اثبات. همانند لم ۳–۳–۷، برای $N_۱, N_۲ \in \bar{\mathcal{M}}$ اگر $\delta_{N_۱} = \delta_{N_۲}$، آنگاه $N_۱ \cong N_۲$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\bar{\mathcal{M}}$ در شرط (۲) تعریف ۳–۲–۴ صدق می‌کند. فرض کنید $\alpha < \beta < \omega_۱$ در $\mathrm{supp}(\bar{\mathcal{M}})$ هستند و $N \in \bar{\mathcal{M}}(\alpha)$. اگر $\alpha \geq \delta_M$، آنگاه $\bar{\mathcal{M}}(\alpha) = \mathcal{M}_q(\alpha)$ و $\bar{\mathcal{M}}(\beta) = \mathcal{M}_q(\beta)$، پس $N' \in \mathcal{M}_q(\beta) = \bar{\mathcal{M}}(\beta)$ وجود دارد به طوری که $N \in N'$. اکنون فرض کنید $\alpha < \delta_M$. در این صورت سه حالت ممکن وجود دارد که به رابطهٔ بین β و δ_M بستگی دارند.

ابتدا فرض کنید $\beta < \delta_M$. اگر $N \in \mathcal{M}_r(\alpha)$، آنگاه $N' \in \mathcal{M}_r(\beta) \subseteq \bar{\mathcal{M}}(\beta)$ وجود دارد به طوری که $N \in N'$. در غیر این صورت $N = \varphi_{M,N'}(K)$ جایی که $N' \in \mathcal{M}_q(\delta_M)$ و $K \in \mathcal{M}_r$. گیریم $K' \in \mathcal{M}_r(\beta)$ چنان باشد که $K \in K'$. در این صورت

$$\varphi_{M,N'}(K') \in \bar{\mathcal{M}}(\beta) \text{ و } N \in \varphi_{M,N'}(K').$$

اکنون فرض کنید $\beta = \delta_M$. اگر $N \in \mathcal{M}_r(\alpha)$، آنگاه $N \in M \in \bar{\mathcal{M}}(\beta)$. در غیر این صورت، $N = \varphi_{M,N'}(K)$ جایی که $N' \in \mathcal{M}_q(\delta_M)$ و $K \in \mathcal{M}_r$. در این حالت، $N \in N'$ و حکم برقرار است. در آخر، فرض کنید $\beta > \delta_M$. در این صورت $N' \in \bar{\mathcal{M}}(\delta_M)$ و $N'' \in \bar{\mathcal{M}}(\beta)$ وجود دارند به طوری که $N \in N' \in N''$. پس $N \in N''$ و حکم ثابت می‌شود.

ادعا ۳–۳–۱۰. $\bar{q} = \langle \bar{\mathcal{M}}, \bar{f} \rangle \in \mathbb{P}$.

اثبات. در ادعاهای ۳–۳–۸ و ۳–۳–۹ نشان دادیم $\bar{f}$ تابع جزئی است و $\bar{\mathcal{M}} \in \mathbb{Q}$. اکنون فرض کنید $\alpha \in N_۱ \cap \mathrm{dom}(\bar{f})$ و $N_۱ \cong N_۲$، جایی که $N_۱, N_۲ \in \bar{\mathcal{M}}$. باید نشان دهیم:

$\varphi_{N_1,N_2}(\alpha) \in \mathrm{dom}(\bar{f})$ و $\bar{f}(\varphi_{N_1,N_2}(\alpha)) = \bar{f}(\alpha)$.

اگر $\alpha \in \mathrm{dom}(f_r)$، آنگاه $\bar{f} \ni \langle \varphi_{N_1,N_2}(\alpha), f_r(\alpha)\rangle$، که در این صورت حکم برقرار است. اگر $\alpha \in \mathrm{dom}(f_q) \setminus \mathrm{dom}(f_r)$، آنگاه $\alpha \notin \delta'_M$ و $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_q \setminus \mathcal{M}_r$. بنابراین

$\varphi_{N_1,N_2}(\alpha) \in \mathrm{dom}(f_q)$ و $f_q(\varphi_{N_1,N_2}(\alpha)) = f_q(\alpha)$.

لذا

$\varphi_{N_1,N_2}(\alpha) \in \mathrm{dom}(\bar{f})$ و $\bar{f}(\varphi_{N_1,N_2}(\alpha)) = \bar{f}(\alpha)$.

در آخر اگر $\alpha = \varphi_{N',N_1}(\beta)$ برای $\beta \in \mathrm{dom}(f_r)$ و $N' \in \bar{\mathcal{M}}$ با $N' \simeq N_1$، آنگاه

$$\varphi_{N_1,N_2}(\alpha) = \varphi_{N_1,N_2}\varphi_{N',N_1}(\beta) = \varphi_{N',N_2}(\beta) \in \mathrm{dom}(\bar{f})$$

و

$$\bar{f}(\varphi_{N_1,N_2}(\alpha)) = \bar{f}(\varphi_{N',N_2}(\beta)) = f_r(\beta) = f_r(\alpha) = \bar{f}(\alpha)$$

و حکم برقرار می‌شود.

از ساختن مشخص است $\bar{q}$ گسترش مشترک q و r است. بنابراین q و r سازگار هستند و لم ۳–۳–۷ اثبات می‌شود. ■

لم ۳–۳–۱۱، برای هر M' لازم، و برای هر شرط $p \in M' \cap \mathbb{P}$، گسترش به طور قوی $(M', \mathbb{P})$ـ ژنریک معرفی می‌کند.

لم ۳–۳–۱۱. *گیریم $\omega_2 < \theta$ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ است و $M' \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$. فرض کنید $M = M' \cap H_{\omega_2}$. اگر $p \in \mathbb{P} \cap M'$، آنگاه $p' = \langle \mathcal{M}_p \cup \{M\}, f_p\rangle$ شرط فورسینگ است.*

اثبات. چون $\mathcal{M}_p$ زیرمجموعهٔ متناهی H_{ω_2}، $\mathrm{dom}(f_p)$ زیرمجموعهٔ متناهی ω_2 و $\mathrm{ran}(f_p) \subseteq 2$ است، پس $p \in H_{\omega_2}$. بنابراین $p \in M'$ نتیجه می‌دهد $p \in M$. پس $\mathcal{M}_p$ و $\mathrm{dom}(f_p)$ نیز زیرمجموعه‌های متناهی M هستند. اکنون کافی است توجه کنید هیچ ساختار N در $\mathcal{M}_p$ وجود ندارد به طوری که با M یکریخت باشد. حالا چون $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_2}$ و $\mathcal{M}_p \subseteq M$، پس بررسی شروط (۱) و (۲) تعریف ۳–۲–۴، به اعضای $\mathcal{M}_p$

محدود می‌شود که می‌دانیم شرط فورسینگ $\mathbb{Q}$ است. بنابراین $\mathcal{M}_p \cup \{M\} \in \mathbb{Q}$. از آنجا که $f_{p'} = f_p$، لذا شرط (ii) تعریف ۳–۳–۱، نیز برقرار است. بلاخره، چون هر $N_۱$ و $N_۲$ دلخواه که برای بررسی شرط (iii) تعریف ۳–۳–۱ انتخاب شوند، به $\mathcal{M}_p$ تعلق دارند، پس شرط (iii) تعریف ۳–۳–۱ نیز برقرار است. ■

اکنون با قرار دادن همه این‌ها در کنار یکدیگر، می‌توانیم نتیجهٔ زیر را به دست بیاوریم.

نتیجه ۳–۳–۱۲. *$\mathbb{P}$ فورسینگ به طور قوی سره است.*

اثبات. گیریم θ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ است، $M' \in \mathcal{E}_{\aleph_۰,\theta}$، $\mathbb{P} \in M'$ و $p \in \mathbb{P} \cap M'$. فرض کنید $M' \cap H_{\omega_۲} = M$ و $p' = \langle \mathcal{M}_p \cup \{M\}, f_p \rangle$. لم ۳–۳–۱۱ نتیجه می‌دهد p' شرط فورسینگ است و لم ۳–۳–۷ نتیجه می‌دهد p' به طور قوی $(M', \mathbb{P})$ـ ژنریک است. چون $p' \leq p$، پس $\mathbb{P}$ فورسینگ به طور قوی سره است. ■

به ویژه، نتیجه ۳–۳–۱۲ به همراه لم ۲–۳–۹ تایید می‌کنند در فورسینگ با $\mathbb{P}$ $\aleph_۱$ حفظ می‌شود.

لم ۳–۳–۱۳. *$\mathbb{P}$، $\aleph_۲-\text{c.c.}$ است.*

اثبات. فرض کنید $A = \{p_\alpha = \langle \mathcal{M}_\alpha, f_\alpha \rangle \colon \alpha < \omega_۲\}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{P}$ از کاردینالیتهٔ $\aleph_۲$ باشد. برای هر $\alpha < \omega_۲$، $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ زیرمجموعهٔ متناهی $\omega_۲$ است. بنابراین با استفاده از لم Δـ سیستم [۱۴، قضیه ۱۸.۹]، $\{\mathrm{dom}(f_\alpha) \colon \alpha < \omega_۲\}$ به شکل Δـ سیستم با ریشهٔ $d \subset \omega_۲$ است. بنابراین برای هر $\alpha \neq \beta$،

$$\mathrm{dom}(f_\alpha) \cap \mathrm{dom}(f_\beta) = d.$$

چون فقط تعداد متناهی از توابع $f : d \longrightarrow ۲$ وجود دارد، پس برای هر $\alpha < \omega_۲$، $f_\alpha \restriction d = g$ برای ثابت $g \colon d \longrightarrow ۲$. اکنون برای هر $\alpha < \omega_۲$ قرار دهید:

$$\bar{\mathcal{M}}_\alpha = \{\bar{M} \colon \exists M \in \mathcal{M}_\alpha, \text{ فروریزی متعدی M است } \bar{M}\}.$$

چون CH برقرار است، $|H_{\omega_۱}| = \aleph_۱$. چون برای هر $\alpha < \omega_۲$، $\bar{\mathcal{M}}_\alpha \in H_{\omega_۱}$، لذا برای $\alpha < \beta < \omega_۲$، $\bar{\mathcal{M}}_\alpha = \bar{\mathcal{M}}_\beta$. بنابراین $\mathcal{M}_\alpha \cup \mathcal{M}_\beta \in \mathbb{Q}$. اکنون نشان می‌دهیم برای $\alpha < \beta < \omega_۲$، شرط‌های p_α و p_β سازگار هستند. برای این منظور، $\alpha < \beta < \omega_۲$ را ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید $q = \langle \mathcal{M}_q, f_q \rangle$ جایی که

- $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_{p_\alpha} \cup \mathcal{M}_{p_\beta}$ و

- $$f_q = f_{p_\alpha} \cup f_{p_\beta} \cup \{\langle \varphi_{N,N'}(\gamma), (f_{p_\alpha} \cup f_{p_\beta})(\gamma)\rangle : (N, N' \in \mathcal{M}_q) \wedge (N \cong N') \wedge (\gamma \in \mathrm{dom}(f_{p_\alpha} \cup f_{p_\beta}))\}$$

همانند ادعای ۳–۳–۱۰، ثابت می‌شود q شرط فورسینگ است و p_α و p_β را گسترش می‌دهد. بنابراین هر پادزنجیر $\mathbb{P}$ کاردینالیتهٔ کمتر از $\aleph_2$ دارد. ■

با استفاده از نتیجهٔ ۳–۳–۱۲ و لم ۳–۳–۱۳، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۳–۳–۱۴. *فورسینگ $\mathbb{P}$ همهٔ کاردینال‌ها را حفظ می‌کند.*

اثبات. چون ω مطلق است پس توسط هر فورسینگی حفظ می‌شود. از آنجا که هر فورسینگ به طور قوی سره $\aleph_1$ را حفظ می‌کند، بنابراین طبق نتیجهٔ ۳–۳–۱۲، $\aleph_1$ نیز حفظ می‌شود. در آخر چون $\mathbb{P}$ $\aleph_2-$c.c. است، پس طبق لم ۲–۲–۲۶، همهٔ کاردینال‌های بزرگتر یا مساوی $\aleph_2$ نیز حفظ می‌شوند. ■

اکنون نشان می‌دهیم فورسینگ با $\mathbb{P}$، GCH را حفظ می‌کند. با توجه به کاردینالیتهٔ فورسینگ، کافی است نشان دهیم CH توسط $\mathbb{P}$ حفظ می‌شود.

لم ۳–۳–۱۵. *گیریم G فیلتر $\mathbb{P}$ـ ژنریک روی V، θ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ، $M, M' \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$ یکریخت، $\mathbb{P} \in M \cap M'$ و $p \in \mathbb{P} \cap M$. فرض کنید $M_\circ = M \cap H_{\omega_2}$ و $M'_\circ = M' \cap H_{\omega_2}$. در این صورت*

$$p_{M,M'} = \langle \mathcal{M}_p \cup \{M_\circ, M'_\circ\}, f_p \cup \{\langle \varphi_{M,M'}(\alpha), f_p(\alpha)\rangle : \alpha \in \mathrm{dom}(f_p) \cap M\}\rangle$$

شرط فورسینگ است که اجبار می‌کند

$$\check{\varphi}_{M,M'}[\dot{G} \cap \check{M}] = \dot{G} \cap \check{M}'$$

اثبات. مشابه برهان ادعاهای ۳–۳–۸، ۳–۳–۹ و ۳–۳–۱۰ ثابت می‌شود $p_{M,M'}$ شرط فورسینگ است. با برهان خلف فرض کنید $q \leq p_{M,M'}$ و p' وجود دارند به طوری که

$$q \Vdash \text{“}(\check{p}' \in \dot{G} \cap \check{M}) \wedge (\check{\varphi}_{M,M'}(\check{p}') \notin \dot{G} \cap \check{M}')\text{”}.$$

چون $q \Vdash$ "$\check{p'} \in \dot{G}$"، پس q و p' سازگار هستند. بنابراین فرض کنید q' گسترش مشترک q و p' است. اگر برای هر $r \leq q'$، $t \leq r$ وجود داشته باشد به طوری که $t \leq \varphi_{M,M'}(p')$، آنگاه مجموعهٔ

$$\{t \in \mathbb{P} \colon t \Vdash \text{“}\check{\varphi}_{M,M'}(\check{p'}) \in \dot{G}\text{”}\}$$

زیر q' چگال است. این غیرممکن است زیرا در این صورت

$$q' \Vdash \text{“}\check{\varphi}_{M,M'}(\check{p'}) \in \dot{G} \cap \check{M'}\text{”}$$

که با فرض در تناقض است. بنابراین $r \leq q'$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \leq r$، $\neg(t \leq \varphi_{M,M'}(p'))$؛ یعنی r با $\varphi_{M,M'}(p')$ ناسازگار است. اکنون شرط $r{\restriction}M = \langle \mathcal{M}_{r\restriction M}, f_r{\restriction}\delta'_M \rangle \in M$، همانند لم ۳–۳–۷ را در نظر بگیرید. ادعاهای زیر را مطرح می‌کنیم.

ادعا ۳–۳–۱۶. گیریم r و $r{\restriction}M$ همانند بالا باشند. برای هر $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\theta}$، اگر $M \cap H_{\omega_2} \in \mathcal{M}_r$، آنگاه r و $r{\restriction}M$ سازگار هستند.

اثبات. فرض کنید

$$s = \langle \mathcal{M}_s, f_s \rangle = \langle \mathcal{M}_r \cup \mathcal{M}_{r\restriction M}, f_r \rangle = r \cup r{\restriction}M$$

در این صورت $\mathcal{M}_s \in \mathbb{Q}$ و f_s تابع جزئی است. گیریم $\alpha \in \mathrm{dom}(f_s) \cap N_0$ و $N'_0 \cong N_0$. اگر $\delta_{N_0} < \delta_M$، آنگاه $N_1, N'_1 \in \mathcal{M}_r(\delta_M)$ وجود دارند به طوری که $\alpha \in N_1$ و $\varphi_{N_0,N'_0}(\alpha) \in N'_1$ و حکم برقرار است. اگر $\delta_{N_0} \geq \delta_M$، آنگاه N_0 و N'_0 در $\mathcal{M}_r$ خواهند بود و حکم برقرار است. بنابراین s شرط فورسینگ و گسترش مشترک r و $r{\restriction}M$ است.

ادعا ۳–۳–۱۷. $\varphi_{M,M'}(r{\restriction}M) = r{\restriction}M'$.

اثبات. $r{\restriction}M = \langle \mathcal{M}_{r\restriction M}, f_r{\restriction}\delta'_M \rangle$. بنابراین

$$\varphi_{M,M'}(r{\restriction}M) = \langle \varphi_{M,M'}(\mathcal{M}_{r\restriction M}), \varphi_{M,M'}(f_r{\restriction}\delta'_M) \rangle.$$

از طرفی چون

$$\mathcal{M}_{r\restriction M} = \{\varphi_{N_l^w, M_0}(N_i^w) : (w = \langle N_0^w, \ldots, N_l^w \rangle \in W) \wedge (i < l)\}$$

پس

$$\varphi_{M,M'}(\mathcal{M}_{r\restriction M}) = \{\varphi_{N_l^w,M'_\circ}(N_i^w) : (w = \langle N_\circ^w, \ldots, N_l^w \rangle \in W) \wedge (i < l)\}$$

و از طرف دیگر،

$$\mathcal{M}_{r\restriction M'} = \{\varphi_{N_l^{w'},M'_\circ}(N_i^{w'}) : (w' = \langle N_\circ^{w'}, \ldots, N_l^{w'} \rangle \in W) \wedge (i < l)\}.$$

گیریم $N \in \varphi_{M,M'}(\mathcal{M}_{r\restriction M})$. بنابراین $N' \in \mathcal{M}_{r\restriction M}$ وجود دارد به طوری که $N = \varphi_{M,M'}(N')$. اگر $N' \in \mathcal{M}_r \cap M$، آن‌گاه $\in$ـ مسیر $\langle N_\circ^{w'}, \ldots, N_{l-1}^{w'}, M_\circ \rangle$ وجود دارد به طوری که $N' = N_j^{w'}$ برای $j < l$. لذا

$$\varphi_{M_\circ,M'_\circ}(N_j^{w'}) = \varphi_{M_\circ,M'_\circ}(N') = N \in \mathcal{M}_{r\restriction M'}.$$

اگر $N' \in \mathcal{M}_{r\restriction M} \setminus \mathcal{M}_r$، آن‌گاه برای $w = \langle N_\circ^w, \ldots, N_l^w \rangle$، $N' = \varphi_{N_l^w,M_\circ}(N_j^w)$. بنابراین

$$N = \varphi_{M_\circ,M'_\circ}(N') = \varphi_{M_\circ,M'_\circ}\varphi_{N_l^w,M_\circ}(N_j^w) \in \mathcal{M}_{r\restriction M'}.$$

برعکس، فرض کنید $N \in \mathcal{M}_{r\restriction M'}$. لذا $N \in \mathcal{M}_r \cap M'$ یا $N \in \mathcal{M}_{r\restriction M'} \setminus M'$. بنابراین همانند قبل $N \in \mathcal{M}_{r\restriction M}$. اکنون فرض کنید $\alpha \in \mathrm{dom}(f_r\restriction\delta'_M)$. پس $\alpha \in \mathrm{dom}(f_r) \cap M_\circ$ و $M_\circ \cong M'_\circ \in \mathcal{M}_r$. پس $\varphi_{M_\circ,M'_\circ}(\alpha) \in \mathrm{dom}(f_r)$ و $f_r(\varphi_{M_\circ,M'_\circ}(\alpha)) = f_r(\alpha)$. همچنین $\alpha \in \mathrm{dom}(f_r\restriction\delta'_{M'})$ نتیجه می‌دهد $\alpha = \varphi_{M_\circ,M'_o}(x)$ برای $x \in M_\circ$. پس

$$x = \varphi_{M'_\circ,M_\circ}(\alpha) \in \mathrm{dom}(f_r) \cap M_\circ \text{ و } f_r(x) = f_r(\alpha).$$

بنابراین $\varphi_{M,M'}(f_{r\restriction M}) = f_{r\restriction M'}$.

اکنون چون $r \leq p'$ و $p' \in M$، به دست می‌آوریم $r\restriction M \leq p'$. با اعمال $\varphi_{M,M'}$ خواهیم داشت $r\restriction M' = \varphi_{M,M'}(r\restriction M) \leq \varphi_{M,M'}(p')$، و بنابراین $r \leq \varphi_{M,M'}(p')$. اما $r \perp \varphi_{M,M'}(p')$، که تناقض است. ■

لم ۳–۳–۱۸. *فورسینگ با* $\mathbb{P}$*،* CH *را حفظ می‌کند.*

اثبات. با برهان خلف فرض کنید $\langle r_\alpha : \alpha < \omega_۲ \rangle$ دنبالهٔ اعداد حقیقی دو به دو مجزا در $V[G]$ باشد، جایی که $G \subseteq \mathbb{P}$ فیلتر Vـ‌ژنریک است. گیریم p شرطی است که این گزاره را اجبار می‌کند. برای هر $\alpha < \omega_۲$، گیریم $p_\alpha \leq p$ اجبار می‌کند $\dot{r}_\alpha \subseteq \check{\omega}$ عدد حقیقی است جایی که $\dot{r}_\alpha$ $\mathbb{P}$ـ‌ترم r_α است. کاردینال منتظم و به اندازهٔ کافی بزرگ θ، و $\alpha < \omega_۲$ را ثابت در نظر می‌گیریم. گیریم $M_\alpha \in \mathcal{E}_{\aleph_۰, \theta}$ و $p_\alpha, p, \mathbb{P}, \dot{r}_\alpha \in M_\alpha$. چون $|M_\alpha| = \aleph_۰$، پس $\alpha < \beta < \omega_۲$ وجود دارند به طوری که

$$\langle M_\alpha, \in, \mathbb{P}, p_\alpha, \dot{r}_\alpha \rangle \cong \langle M_\beta, \in, \mathbb{P}, p_\beta, \dot{r}_\beta \rangle.$$

به ویژه $\varphi_{M_\alpha, M_\beta}(\dot{r}_\alpha) = \dot{r}_\beta$ و $\varphi_{M_\alpha, M_\beta}(p_\alpha) = p_\beta$. گیریم

$$p_{M_\alpha, M_\beta} = \langle \mathcal{M}_{p_\alpha} \cup \mathcal{M}_{p_\beta} \cup \{ M_\alpha \cap H_{\omega_۲}, M_\beta \cap H_{\omega_۲} \}, f_{p_\alpha} \cup f_{p_\beta} \rangle.$$

در این صورت، لم ۳–۳–۱۵ نتیجه می‌دهد p_{M_α, M_β} شرط فورسینگ است که p_α و p_β را گسترش می‌دهد. برای هر $n < \omega$، هر $p' \in M_\alpha \cap \mathbb{P}$ و هر $\xi \in \{۰, ۱\}$،

$p' \Vdash$ "$\dot{r}_\alpha(\check{n}) = \check{\xi}$" اگر و تنها اگر $\varphi_{M_\alpha, M_\beta}(p') \Vdash$ "$\dot{r}_\beta(\check{n}) = \check{\xi}$".

ادعا ۳–۳–۱۹. $p_{M_\alpha, M_\beta} \Vdash$ "$\dot{r}_\alpha = \dot{r}_\beta$"

اثبات. با برهان خلف فرض کنید $q \leq p_{M_\alpha, M_\beta}$ و $n < \omega$ وجود دارند به طوری که

$$q \Vdash \text{“}(\dot{r}_\alpha(\check{n}) = ۰) \wedge (\dot{r}_\beta(\check{n}) = ۱)\text{”}.$$

در این صورت با استفاده از خاصیت زیرساختار مقدماتی بودن، $r \in \mathbb{P} \cap M_\alpha$ وجود دارد به طوری که $r \leq q \restriction M_\alpha$ و $r \Vdash$ "$\dot{r}_\alpha(\check{n}) = ۰$". چون $\varphi_{M_\alpha, M_\beta}(q \restriction M_\alpha) = q \restriction M_\beta$، پس $q \restriction M_\beta$ و $\varphi_{M_\alpha, M_\beta}(r)$ سازگارند. بنابراین $q || \varphi_{M_\alpha, M_\beta}(r)$. اما در عین حال $\varphi_{M_\alpha, M_\beta}(r) \Vdash$ "$\dot{r}_\beta(\check{n}) = ۰$" که با $q \Vdash$ "$\dot{r}_\beta(\check{n}) = ۱$" در تناقض است. بنابراین $p_{M_\alpha, M_\beta} \Vdash$ "$\dot{r}_\alpha = \dot{r}_\beta$".

ادعای ۳–۳–۱۹ نشان می‌دهد p نمی‌تواند اجبار کند $\langle r_\alpha : \alpha < \omega_۲ \rangle$ دنبالهٔ اعداد حقیقی دو به دو مجزا باشد، پس فرض خلف باطل است. بنابراین فورسینگ با $\mathbb{P}$، CH را حفظ می‌کند. ■

اکنون فرض کنید G فیلتر $\mathbb{P}$ــ ژنریک روی V است و

$$A = \{\alpha\colon \exists p \in G((\alpha \in \mathrm{dom}(f_p)) \wedge (f_p(\alpha) = ۱))\}.$$

همانند سوال ۲ــ۲ــ۲۹، استدلال به وسیلهٔ مجموعه‌های چگال باز، نتیجه می‌دهد A زیرمجموعهٔ $\omega_۲$ از کاردینالیتهٔ $\aleph_۲$ است.

لم ۳ــ۳ــ۲۰. *فرض کنید $x \in \mathcal{P}(\omega_۲) \cap V$، مجموعهٔ شمارای نامتناهی است. در این صورت، مجموعه‌های $x \cap A$ و $x \setminus A$ ناتهی هستند.*

اثبات. گیریم

$$D_x = \{p \in \mathbb{P}\colon \exists \alpha, \beta \in x \cap \mathrm{dom}(f_p)((f_p(\alpha) = ۱) \wedge (f_p(\beta) = ۰))\}.$$

کافی است نشان دهیم D_x زیرمجموعهٔ چگال $\mathbb{P}$ است. زیرا اگر $p \in G \cap D_x$ و $\alpha, \beta \in x \cap \mathrm{dom}(f_p)$ چنان باشند که $f_p(\alpha) = ۱$ و $f_p(\beta) = ۰$، آن‌گاه $\alpha \in x \cap A$ و $\beta \in x \setminus A$.

برای اینکه نشان دهیم D_x چگال است، فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ شرط دلخواه باشد. از آنجا که x نامتناهی و $\mathrm{dom}(f_p)$ متناهی است، پس $\alpha, \beta \in x \setminus \mathrm{dom}(f_p)$ وجود دارند به طوری که برای هر $N \cong N'$ در $\mathcal{M}_p$، $\varphi_{N,N'}(\alpha) \neq \beta$. گیریم

$$q = \langle \mathcal{M}_p, f_p \cup \{\langle \varphi_{N,N'}(\alpha), ۱\rangle, \langle \varphi_{N,N'}(\beta), ۰\rangle\colon (N, N' \in \mathcal{M}_p) \wedge (N \cong N')\}\rangle.$$

q شرط فورسینگ است، p را گسترش می‌دهد و همانطور که خواسته شده است به D_x تعلق دارد. ■

اکنون برهان قضیه ۳ــ۱ــ۳ به پایان می‌رسد.

فصل چهارم:

الحاق زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در ω_1 و فورسینگ αــ سره

۴–۱ مقدمه

مجموعهٔ پایا، زیرمجموعهٔ بی‌کران کاردینال منتظم ناشمارا است. در واقع مجموعهٔ پایا، همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در این کاردینال را قطع می‌کند. در ۱۹۷۶، باومگارتنر و همکاران[۱] در [۳]، نشان دادند مجموعهٔ پایا مفهوم مطلق نیست. به بیان دقیق‌تر، آن‌ها ثابت کردند زیرمجموعهٔ پایای $S \subseteq \omega_1$، می‌تواند در گسترش ژنریک، که به ویژه ω_1 را حفظ می‌کند، ناپایا[۲] باشد. این پدیده، تحقیقات را به سمت مفاهیم فورسینگی سوق داد که زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در مجموعه‌های پایا الحاق می‌کنند. از جمله مهم‌ترین و موثرترین گام‌ها در این زمینه، در ۱۹۸۳ توسط آبراهام و شلاه در [۱] برداشته شد. آن‌ها با فرض مجموعهٔ پایای $T \subseteq \omega_1$، فورسینگی را معرفی کردند که بدون الحاق مجموعهٔ شمارای جدیدی به ساختار زمینه، زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در T الحاق می‌کرد. آن‌ها سپس با جایگزین کردن کاردینال منتظم و ناشمارای ω_1 با کاردینال دلخواه κ، فورسینگی را معرفی کردند که بدون الحاق مجموعهٔ جدیدی از کاردینالیتهٔ کمتر از κ، مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در مجموعهٔ پایای داده شدهٔ $S \subseteq \kappa$ الحاق می‌کرد. استفاده از مفهوم مجموعه‌های پایای چاق[۳] برای برخی کاردینال‌های خاص، و همکاری شلاه برای حالتی که κ کاردینال منفرد[۴] است، از نقاط برجستهٔ این کار مشترک است. پس از آن در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۵، میشل در [۲۱] و فریدمن در [۹] به صورت مجزا مفاهیم فورسینگی برای الحاق زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران در ω_2، توسط شرط‌های متناهی معرفی کردند. این مقالات علاوه بر نتایج کلیدی مانند "سازگاری کاردینال κ^+ـ مهلو[۵] نتیجه می‌دهد ایده‌آل ناپایای روی ω_2، شامل هیچ زیرمجموعهٔ پایا از $\mathrm{cof}(\omega_1)$ نیست" از جهات دیگری نیز دارای اهمیت بودند. آن‌ها اولین گام‌ها را برای تعمیم دادن روشی برداشتند که از فورسینگ با شرط‌های متناهی برای الحاق شی ژنریک از کاردینالیتهٔ بزرگتر از $\aleph_1$ استفاده می‌کرد. به عنوان مثال، از تکنیک‌های میشل می‌توان برای ساختن ساختارهایی بدون درختان ω_2ـآرونشاین،[۶] و همچنین الحاق درختان ω_2ـ سوسلین[۷] به وسیله شرط‌های متناهی استفاده کرد.

[1] Baumgartner, Harrington, and Kleinberg

[2] Nonstationary

[3] Fat-stationarity

[4] Singular

[5] Mahlo

[6] Aronszajn

[7] Souslin

در ۲۰۱۴، نیمن توانست با شرطهایی ساده‌تر، تکنیکی کاملا کاربردی برای فورسینگ روی ω_2 با شرطهای متناهی معرفی کند. شرطهای نیمن، که دنباله‌های متناهی از زیرساختارهای مقدماتی شمارا یا متعدی هستند، علاوه بر اینکه فورسینگ سره برای هر دو نوع ساختار به کار رفته را تشکیل می‌دهند، منجر به نتایج بسیار جالبی مانند اثبات سازگاری PFA نیز می‌شوند. نیمن همچنین در ادامهٔ کارهای قبل، زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_2 به وسیلهٔ شرطهای متناهی الحاق می‌کند.

مفهوم سره بودن فورسینگ، توسط شلاه در حین تحقیقات اولیه‌اش در زمینه فورسینگ‌های مکرر با حمایت شمارا، برای حفظ $\aleph_1$ معرفی شد [۲۶]. مجموعهٔ جزئا مرتب $\mathbb{P}$ را فورسینگ سره گوییم، هرگاه فورسینگ با $\mathbb{P}$ زیرمجموعه‌های پایای مجموعهٔ $[\lambda]^{\aleph_0}$ را برای هر کاردینال ناشمارای منتظم λ حفظ کند. اگر $\mathbb{P}$ سره باشد آنگاه هر مجموعهٔ شمارا از اردینال‌ها در گسترش ژنریک، توسط مجموعه‌ای شمارا از اردینال‌ها که به ساختار زمینه تعلق دارد پوشیده می‌شود. بنابراین فورسینگ با $\mathbb{P}$ به ویژه $\aleph_1$ را فرو نمی‌ریزد. شلاه همچنین معادل‌سازی برای سره بودن با استفاده از شرطهای $(M, \mathbb{P})$ــژنریک معرفی کرد. فورسینگ $\mathbb{P}$ سره است اگر و تنها اگر برای هر کاردینال منتظم و به اندازهٔ کافی بزرگ θ و هر زیرساختار مقدماتی شمارای M از H_θ، هر شرط $p \in M$، گسترشی مانند q داشته باشد که شرطی $(M, \mathbb{P})$ــژنریک است؛ یعنی برای هر مجموعهٔ چگال باز $D \subseteq \mathbb{P}$ که در M باشد مجموعهٔ $D \cap M$ زیر q پیش‌چگال است.

بعد از آن، میشل، مفهوم به طور قوی سره بودن را با استفاده از شرطهای به طور قوی $(M, \mathbb{P})$ــژنریک معرفی کرد. تنها تفاوت آن‌ها با شرطهای $(M, \mathbb{P})$ــژنریک در این است که هر مجموعهٔ چگال باز $D \subseteq \mathbb{P} \cap M$ باید زیر آن شرط q پیش‌چگال باشد [۲۲].

شلاه همچنین برای هر $\alpha < \omega_1$ تعمیمی فنی از سره بودن را معرفی کرده است که با عنوان αــسره بودن شناخته می‌شود. او نشان داده است برای هر اردینال تجزیه‌ناپذیر α، فورسینگی وجود دارد که $< \alpha$ــسره است اما αــسره نیست.

در این فصل، تعمیمی از فورسینگ آبراهام که مثال جدیدی برای جداسازی αــسره بودن است، ارائه می‌شود. برای هر اردینال تجزیه‌ناپذیر α، تعمیمی از فورسینگ آبراهام برای الحاق زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_1، آمده در [۱] را معرفی می‌کنیم که $< \alpha$ــسره است اما αــسره نیست.

در بخش ۴–۳ با الهام از روش نیمن، و با شرط‌های متناهی تعمیمی از فورسینگ آبراهام برای الحاق زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_1 معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم این فورسینگ به طور قوی سره است اما ωـ سره نیست. سپس در بخش ۴–۴ برای هر اردینال تجزیه‌ناپذیر $\alpha < \omega_1$، تعمیم $\mathbb{P}[\alpha]$ از فورسینگ $\mathbb{P}$ را معرفی می‌کنیم که مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_1 الحاق می‌کند، $<\alpha$ـ سره است و αـ سره نیست. در واقع این فورسینگ خصوصیت قوی‌تری دارد که اگر $\beta < \alpha$، $\mathcal{N} = \langle N_\xi : \xi \leq \beta \rangle$ βـ برج[1] باشد و $\mathbb{P}[\alpha] \in N_0$، آنگاه هر شرط $p \in N_0$ گسترشی مانند q دارد به طوری که اگر $\xi \leq \beta$ اردینال حدی[2] نباشد، آنگاه q به طور قوی $(N_\xi, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است و هر زمان $\delta \leq \beta$ اردینال حدی باشد، $(N_\delta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است.

۴–۲ پیش‌نیازها

ابتدا یادآوری می‌کنیم $\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_1}$ نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ همهٔ زیرساختارهای مقدماتی شمارای H_{ω_1}، و برای هر $M \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_1}$، δ_M نشان‌دهندهٔ اردینال شمارای $M \cap \omega_1$ است.

تعریف ۴–۲–۱. فرض کنید $\alpha < \omega_1$. دنبالهٔ $\mathcal{N} = \langle N_\xi \colon \xi \leq \alpha \rangle$، αـ برج نامیده می‌شود هرگاه برای کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ λ داشته باشیم:

۱. برای هر $\xi \leq \alpha$، $N_\xi \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\lambda}$؛

۲. $\alpha \in N_0$؛

۳. برای هر $\zeta < \alpha$، $N_\zeta \in N_{\zeta+1}$؛

۴. برای هر اردینال حدی $\delta \leq \alpha$، $N_\delta = \bigcup_{\xi<\delta} N_\xi$ و

۵. برای هر $\xi < \alpha$، $\langle N_\zeta : \zeta \leq \xi \rangle \in N_{\xi+1}$.

تعریف ۴–۲–۲. فرض کنید $\mathbb{P}$ فورسینگ و $\mathcal{N} = \langle N_\xi \colon \xi \leq \alpha \rangle$ αـ برج باشد به طوری که $\mathbb{P} \in N_0$. $q \in \mathbb{P}$ را $(\mathcal{N}, \mathbb{P})$ـ ژنریک گوییم، هرگاه q برای هر $\xi \leq \alpha$ شرط $(N_\xi, \mathbb{P})$ـ ژنریک باشد.

[1] Tower

[2] Limit Ordinal

تعریف ۴–۲–۳. فرض کنید $\alpha < \omega_۱$ و $\mathbb{P}$ فورسینگ باشد. گوییم $\mathbb{P}$ αـ سره است هرگاه برای هر αـ برج $\mathcal{N} = \langle N_\xi : \xi \leq \alpha \rangle$ با $\mathbb{P} \in N_۰$، هر شرط $p \in N_۰$ گسترشی $(\mathcal{N}, \mathbb{P})$ـ ژنریک داشته باشد. $\mathbb{P}$، $< \alpha$ـ سره است، هرگاه برای هر $\beta < \alpha$، βـ سره باشد.

تعریف ۴–۲–۴. اردینال α را تجزیه‌ناپذیر گوییم، هرگاه $\beta + \gamma < \alpha$ برای هر $\beta \leq \gamma < \alpha$.

۴–۳ الحاق زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در $\omega_۱$

در این بخش تعمیمی از فورسینگ آبراهام که در [۱] آمده است، معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم این فورسینگ، به طور قوی سره است اما ωـ سره نیست. [۱۱]

تعریف ۴–۳–۱. فرض کنید فورسینگ $\mathbb{P}$ شامل شرط‌هایی به شکل زوج مرتب‌های $p = \langle \mathcal{M}_p, f_p \rangle$ باشد به طوری که:

۱. $\mathcal{M}_p = \langle M_i^p : i < n_p \rangle$ دنبالهٔ متناهی $\in$ـ صعودی از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_۰, \aleph_۱}$ است و

۲. تابع $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow H_{\omega_۱}$ با دامنهٔ $\mathcal{M}_p$ طوری تعریف می‌شود که برای $i < n_p - ۱$، $f_p(M_i^p)$ زیرمجموعهٔ متناهی $M_{i+۱}^p$ و $f_p(M_{n_p-۱}^p)$ زیرمجموعهٔ متناهی $H_{\omega_۱}$ است.

برای $p, q \in \mathbb{P}$ گوییم $p \leq q$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q$ و برای هر $M \in \mathcal{M}_p$، $f_p(M) \subseteq f_q(M)$.

ابتدا نشان می‌دهیم $\mathbb{P}$ مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در $\omega_۱$ الحاق می‌کند.

لم ۴–۳–۲. *اگر $G \subseteq \mathbb{P}$ فیلتر ژنریک باشد، آن‌گاه*

$$C = \{\delta_M : \exists p \in G (M \in \mathcal{M}_p)\}$$

مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در $\omega_۱$ است.

برای اثبات لم ۴–۳–۲ و همچنین برخی نتایج بعدی، ادعای زیر را بیان و اثبات می‌نماییم.

ادعا ۴–۳–۳. برای هر $p \in \mathbb{P}$ و $\gamma \in \omega_1$، $p' \leq p$ با $N \in \mathcal{M}_{p'}$ وجود دارد به طوری که $\gamma < \delta_N$.

اثبات. چون p و γ دو مجموعهٔ شمارا از H_{ω_1} هستند، لم ۲–۱–۳ نتیجه می‌دهد $N \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_1}$ وجود دارد به طوری که $p, \gamma \in N$. گیریم $p' = \langle \mathcal{M}_{p'}, f_{p'} \rangle$ که در آن $\mathcal{M}_{p'} = \mathcal{M}_p \cup \{N\}$، $f_{p'}(M) = f_p(M)$ برای هر $M \in \mathcal{M}_p$ و $f_{p'}(N) = \emptyset$. در این صورت p' شرط فورسینگ و گسترشی از p است و $\gamma < \delta_N$.

طبق ادعای ۴–۳–۳ مجموعهٔ

$$D_\gamma = \{q \in \mathbb{P} \colon \exists M \in \mathcal{M}_q (\gamma < \delta_M)\}$$

برای هر $\gamma \in \omega_1$ در $\mathbb{P}$ چگال است. بنابراین C در ω_1 بی‌کران است. اکنون فرض کنید γ نقطهٔ حدی[1] C در $V[G]$ باشد. بنابراین $p \in \mathbb{P}$ وجود دارد به طوری که $p \Vdash$ "$\check{\gamma} \in \lim \dot{C}$" جایی که $\dot{C}$، $\mathbb{P}$ـ ترم طبیعی C است. ادعا می‌کنیم p همچنین اجبار می‌کند $\check{\gamma} \in \dot{C}$. با برهان خلف فرض کنید چنین نباشد. بنابراین هیچ $M \in \mathcal{M}_p$ وجود ندارد به طوری که $\delta_M = \gamma$. در صورت لزوم با گسترش p مطابق ادعای ۴–۳–۳، $i < n_p - 1$ وجود دارد به طوری که $\delta_{M_i^p} < \gamma < \delta_{M_{i+1}^p}$. فرض کنید $\xi < \delta_{M_{i+1}^p}$ اردینال دلخواه بزرگتر از γ باشد. گیریم $q = \langle \mathcal{M}_q, f_q \rangle$ که در آن $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_p$، $f_q(M) = f_p(M)$ برای هر $M \neq M_i^p$ و $f_q(M_i^p) = f_p(M_i^p) \cup \{\xi\}$. در این صورت q شرط فورسینگ است و p را گسترش می‌دهد. بنابراین $q \Vdash$ "$\check{\gamma} \in \lim \dot{C}$". حال اگر $r \leq q$ و $M_i^p = M_j^r$، آنگاه $\xi \in f_r(M_j^r)$. در نتیجه برای هر $r \leq q$ و هر $N \in \mathcal{M}_r$ اگر $M_j^r \in N$، آنگاه $\xi \in N$؛ یعنی برای هر $r \leq q$ و هر $N \in \mathcal{M}_r$ اینچنین نیست که $\delta_{M_i^p} < \delta_N \leq \xi$. بنابراین هر شرطی که q را گسترش دهد، اجبار می‌کند γ نقطهٔ حدی $\dot{C}$ نیست. در واقع برای هر $r \leq q$، $r \Vdash$ "$\dot{C} \cap (\delta_{M_i^p}, \xi] = \emptyset$". به ویژه

$$r \Vdash \text{"}\dot{C} \cap \gamma \subseteq \delta_{M_i^p} + 1\text{"}.$$

در این حالت طبق لم ۲–۲–۱۴، $q \Vdash$ "$\check{\gamma} \notin \lim \dot{C}$" که در تناقض با فرض است. بنابراین C مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_1 است و برهان لم ۴–۳–۲ کامل می‌شود.

[1] Limit Point

لم ۴–۳–۴. *$\mathbb{P}$ به طور قوی سره است.*

اثبات. فرض کنید λ کاردینال منتظم به اندازهٔ کافی بزرگ است و $N \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\lambda}$، $\mathbb{P} \in N$ و $p \in \mathbb{P} \cap N$. قرار دهید $N' = N \cap H_{\omega_1}$ و فرض کنید $p' = \langle \mathcal{M}_{p'}, f_{p'} \rangle$ که در آن $\mathcal{M}_{p'} = \mathcal{M}_p \cup \{N'\}$ و $f_{p'}(M) = f_p(M)$ برای هر $M \in \mathcal{M}_p$ و $f_{p'}(N') = \emptyset$. اکنون نشان می‌دهیم p' شرط به طور قوی $(N, \mathbb{P})$ـ ژنریک است که p را گسترش می‌دهد. فرض کنید $q \leq p'$. تحدید q به N را به صورت $q \restriction N = \langle \mathcal{M}_q \cap N, f_q \restriction \mathcal{M}_q \cap N \rangle$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم $q \restriction N \in \mathbb{P} \cap N$. ابتدا توجه کنید $\mathcal{M}_q \cap N$ دقیقاً قسمت ابتدایی $\mathcal{M}_q$ تا قبل از N' است. چون دنبالهٔ اعضای $\mathcal{M}_q$ تا قبل از N'، زیرمجموعهٔ متناهی $N' \subseteq N$ است، لذا دنبالهٔ متناهی از اعضای N و متعلق به N است. از طرفی اگر $Q \in \mathcal{M}_q$ وجود داشته باشد به طوری که $Q \notin N$، آنگاه $N' \in Q$. زیرا در غیر این صورت $Q \in N \cap H_{\omega_1} = N'$ که تناقض است. همچنین تابع f_q برای هر $M \in \mathcal{M}_q \cap N$ با همان تعریف قبل باقی خواهد ماند و برای هر i، $f_q(M_i^q) \in M_{i+1}^q$. اگر فرض کنیم M_k^q بزرگترین عضو $\mathcal{M}_q$ قبل از N' باشد، آنگاه $f_q(M_k^q) \in N' \subseteq H_{\omega_1}$. بنابراین $q \restriction N$ شرط فورسینگ است که به ساختار N تعلق دارد. اکنون اگر $D \subseteq \mathbb{P} \cap N$ چگال باز باشد، آنگاه $r \in D$ وجود دارد به طوری که $q \restriction N$ را گسترش می‌دهد. می‌خواهیم شرط s چنان پیدا کنیم که $s \leq r, q$.

ادعا ۴–۳–۵. قرار دهید $s = \langle \mathcal{M}_s, f_s \rangle$ که در آن $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_r \cup \mathcal{M}_q$ و

$$f_s(M) = \begin{cases} f_r(M) & M \in \mathcal{M}_r \\ f_q(M) & M \in \mathcal{M}_q \setminus \mathcal{M}_r \end{cases}.$$

در این صورت s گسترش مشترک q و r خواهد بود.

اثبات. $\mathcal{M}_s$ دنبالهٔ صعودی متناهی از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_1}$ است، زیرا $\mathcal{M}_q \cap N \subseteq \mathcal{M}_r \subseteq N'$ و برای هر $Q \in \mathcal{M}_q \setminus \mathcal{M}_r$، $N' \in Q$. همچنین برای هر $i + 1 < n_s$، $f_s(M_i^s) \in M_{i+1}^s$. بنابراین s شرط فورسینگ است. از آنجا که $\mathcal{M}_q, \mathcal{M}_r \subseteq \mathcal{M}_s$ و همچنین $f_s(M)$ شامل $f_q(M)$ است زمانی که $M \in \mathcal{M}_q$ و شامل $f_r(M)$ است زمانی که $M \in \mathcal{M}_r$، پس s گسترشی از q و r است. بنابراین شرط s گواه است D زیر p' پیش‌چگال است و در نتیجه $\mathbb{P}$ به طور قوی سره است. ■

لم ۴–۳–۶ نشان می‌دهد فورسینگ $\mathbb{P}$ نمی‌تواند ωـ سره باشد. در واقع در لم ۴–۳–۶ نشان می‌دهیم اگر $\mathbb{P}$ فورسینگ ωـ سره باشد، آنگاه C نمی‌تواند مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران باشد که در تناقض با لم ۴–۳–۲ خواهد بود.

لم ۴–۳–۶. $\mathbb{P}$ *فورسینگ ωـ سره نیست.*

اثبات. همانند لم ۴–۳–۴، برای هر $\lambda \geq \omega_1$ و هر $N \in \mathcal{E}_{\aleph_0,\lambda}$، $N \cap H_{\omega_1}$ زیرساختار مقدماتی H_{ω_1} است و با توجه به تعریف $\mathbb{P}$، $(N, \mathbb{P})$ـ ژنریک بودن، معادل با $(N \cap \omega_1, \mathbb{P})$ـ ژنریک بودن برای هر شرط q است. بنابراین می‌توانیم بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض کنیم $\mathcal{N} = \langle N_i \colon i \leq \omega \rangle$ ωـ برج از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_1}$ باشد به طوری که $\mathbb{P} \in N_0$ و $p \in \mathbb{P} \cap N_0$. نشان خواهیم داد هیچ کدام از گسترش‌های p نمی‌توانند شرط $(\mathcal{N}, \mathbb{P})$ـ ژنریک باشند. یعنی هیچ کدام از گسترش‌های p نمی‌توانند همان طور که در تعریف ۴–۲–۲ آمده است، برای هر $i \leq \omega$، $(N_i, \mathbb{P})$ـ ژنریک باشند. با برهان خلف فرض کنید q چنین شرطی است. در اینجا نیز $\dot{C}$، $\mathbb{P}$ـ ترم طبیعی مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران C است. توجه کنید $\mathbb{P}$ـ ترم $\dot{C}$ توسط $\mathbb{P}$ تعریف‌پذیر است. چون برای هر $i \in \omega$، N_i زیرساختار مقدماتی H_{ω_1} است و $\mathbb{P} \in N_i$، بنابراین $\dot{C} \in N_i$. چون برای هر $i \leq \omega$، q $(N_i, \mathbb{P})$ـ ژنریک است و $\dot{C} \in N_i$، لذا با توجه به لم ۲–۳–۵ داریم

$$q \Vdash \text{“}\delta_{N_i} \text{ در } \dot{C} \cap \delta_{N_i} \text{ بی‌کران است”}.$$

از آنجا که

$$q \Vdash \text{“}\omega_1 \text{ در } \dot{C} \text{ بستهٔ بی‌کران است”}$$

لذا

$$q \Vdash \text{“}\delta_{N_i} \in \dot{C}\text{”}.$$

از طرف دیگر چون $\mathcal{M}_q$ متناهی است، با توجه به ادعای ۴–۳–۳، $q' \leq q$، $n \in \omega$ و $i + 1 < n_{q'}$ وجود دارند به طوری که $\delta_{N_i^{q'}} < \delta_{N_n} < \delta_{N_\omega} \leq \delta_{N_{i+1}^{q'}}$. چون $f_{q'}(N_i^{q'})$ زیرمجموعهٔ متناهی $N_{i+1}^{q'}$ است، پس $m \in \omega$ و $\delta_{N_m} < \xi < \delta_{N_{i+1}^{q'}}$ وجود دارند به طوری که $n < m$ و $\xi \notin f_{q'}(N_i^{q'})$. گیریم $q'' = \langle \mathcal{M}_{q''}, f_{q''} \rangle$ که در آن $\mathcal{M}_{q''} = \mathcal{M}_{q'}$، $f_{q''}(M) = f_{q'}(M)$ برای هر $M \neq N_i^{q'}$ و $f_{q''}(N_i^{q'}) = f_{q'}(N_i^{q'}) \cup \{\xi\}$. همانند لم ۴–۳–۲، $q'' \in \mathbb{P}$ گسترش q است و برای هر $r \leq q''$، $r \Vdash \text{“}\delta_{N_m} \notin \dot{C}\text{”}$ که منجر به تناقض می‌شود. ■

۴–۴ حالت تعمیم‌یافته

در این بخش با تعمیم فورسینگ تعریف ۴–۳–۱ و با کمک شرط‌های جانبی، اثباتی جدید برای قضیهٔ زیر که متعلق به شلاه است ارائه می‌کنیم.

قضیه ۴–۴–۱. *برای هر اردینال تجزیه‌ناپذیر شمارای α، فورسینگی مانند $\mathbb{P}[\alpha]$ وجود دارد به طوری که $\mathbb{P}[\alpha]$ برای هر $\beta < \alpha$، βـ سره است اما αـ سره نیست.*

در ادامه فورسینگ $\mathbb{P}[\alpha]$ برای اردینال تجزیه‌ناپذیر α را معرفی و خواص آن را بررسی می‌نماییم. نشان خواهیم داد $\mathbb{P}[\alpha]$، همانند $\mathbb{P}$ مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_1 الحاق می‌کند. همچنین نشان خواهیم داد $\mathbb{P}[\alpha]$ خصوصیت قوی‌تری نیز دارد که برای هر $\beta < \alpha$ و هر βـ برج $\mathcal{N} = \langle N_\xi : \xi \leq \beta \rangle$ با $\mathbb{P}[\alpha] \in N_0$، هر $p \in N_0$ گسترشی مانند q دارد به طوری که اگر $\xi \leq \beta$ اردینال حدی نباشد، آنگاه q به طور قوی $(N_\xi, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک و اگر $\delta \leq \beta$ اردینال حدی باشد، آنگاه $(N_\delta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است.

تعریف ۴–۴–۲. گیریم $\alpha < \omega_1$ اردینال تجزیه‌ناپذیر است. فورسینگ $\mathbb{P}[\alpha]$ مجموعهٔ همهٔ شرط‌هایی به شکل $p = \langle \mathcal{M}_p, f_p, \mathcal{W}_p \rangle$ است که در آن:

- $\mathcal{M}_p = \langle M^p_\xi : \xi \leq \gamma_p < \alpha \rangle$ دنبالهٔ پیوستهٔ[1] $\in$ـ صعودی از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_1}$ است؛
- $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow H_{\omega_1}$ تابع است به طوری که برای هر $\xi < \gamma$، $f_p(M^p_\xi)$ زیرمجموعهٔ متناهی $M^p_{\xi+1}$ و $f_p(M^p_\gamma)$ زیرمجموعهٔ متناهی H_{ω_1} است، و
- شرط جانبی گواه $\mathcal{W}_p$، زیرمجموعهٔ $\mathcal{M}_p$ است به طوری که برای هر $N \in \mathcal{W}_p$،

$$p{\restriction}N = \langle \mathcal{M}_p \cap N, f_p{\restriction}\mathcal{M}_p \cap N, \mathcal{W}_p \cap N \rangle \in N.$$

برای $p, q \in \mathbb{P}[\alpha]$ گوییم، $q \leq p$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_q$، $f_p(M) \subseteq f_q(M)$ برای هر $M \in \mathcal{M}_p$ و $\mathcal{W}_p \subseteq \mathcal{W}_q$.

[1] Continuous

لم ۴–۴–۳. *اگر* $G \subseteq \mathbb{P}[\alpha]$ *فیلتر ژنریک باشد، آن‌گاه*

$$C = \{\delta_M \colon \exists p \in G(M \in \mathcal{M}_p)\}$$

مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران در ω_1 *است.*

اثبات. گیریم $\gamma \in \omega_1$. شبیه به اثبات ادعای ۴–۳–۳، برای هر $p \in \mathbb{P}[\alpha]$، $q \leq p$ با $N \in \mathcal{M}_q$ وجود دارد به طوری که $\gamma < \delta_N$. بنابراین مجموعهٔ

$$D_\gamma = \{q \in \mathbb{P}[\alpha] \colon \exists \xi \leq \gamma_q(\gamma \leq \delta_{M_\xi})\}$$

زیرمجموعهٔ چگال باز فورسینگ است و تضمین می‌کند C در ω_1 بی‌کران است. فرض کنید $p \Vdash$ "$\gamma \notin \dot{C}$". نشان می‌دهیم p همچنین اجبار می‌کند γ نمی‌تواند نقطهٔ حدی C باشد. برای دقت بیشتر در نوشتن، برای هر $\eta \leq \gamma_p$ قرار می‌دهیم $M_\eta = M_\eta^p$. ابتدا با گسترش p در صورت لزوم، فرض کنید $\gamma < \delta_{M_{\gamma_p}}$. گیریم

$$\delta = \sup\{\delta_{M_\xi} \colon (\xi \leq \gamma_p) \wedge (\delta_{M_\xi} < \gamma)\}.$$

چون $\mathcal{M}_p$ پیوسته است، پس $\eta < \gamma_p$ وجود دارد به طوری که $\delta_{M_\eta} = \delta$. چون فرض کردیم $p \Vdash$ "$\gamma \notin \dot{C}$"، لذا برای هر $M_\eta \in \mathcal{M}_p$، $\gamma \neq \delta_{M_\eta}$. پس لزوماً $\delta < \gamma < \delta_{M_{\eta+1}}$، و بنابراین اردینال $\zeta \in M_{\eta+1}$ وجود دارد به طوری که $\gamma < \zeta$. گیریم q چنان باشد که $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_p$، $f_q(M_\xi) = f_p(M_\xi)$ برای هر $\xi \neq \eta$، $f_q(M_\eta) = f_p(M_\eta) \cup \{\zeta\}$ و $\mathcal{W}_q = \mathcal{W}_p$. در این صورت q شرط فورسینگ است و p را گسترش می‌دهد. همهٔ خواص از p به ارث برده می‌شود، لذا کافی است توجه کنیم $\mathcal{W}_q \subseteq \mathcal{M}_q = \mathcal{M}_p$، و چون $\zeta \in M_{\eta+1}$، پس $f_q(M_\eta) \in M_{\eta+1}$. همچنین چون $\zeta \in N$ برای هر $N \in \mathcal{W}_q$ که $M_\eta \in N$، پس $q{\restriction}N \in N$، برای هر $N \in \mathcal{W}_q$. از تعریف نتیجه می‌شود q گسترشی از p است و همانند لم ۴–۳–۲، برای هر $r \leq q$،

$$r \Vdash \text{"}\dot{C} \cap (\delta_{M_\eta}, \zeta] = \emptyset\text{"}.$$

بنابراین طبق لم ۲–۲–۱۴ p اجبار می‌کند γ نقطهٔ حدی C نیست. ■

اکنون به اثبات قضیهٔ ۴–۲–۱ می‌پردازیم.

قضیه ۴–۴–۴. *$\mathbb{P}[\alpha]$ برای هر $\alpha > \beta$ فورسینگ βــ سره است اما αــ سره نیست.*

برهان قضیهٔ ۴–۴–۴ توسط یک سری از لم‌ها انجام می‌شود. در واقع برای هر $\alpha > \beta$ و هر βــ برج $\mathcal{N} = \langle N_\zeta : \zeta \leq \beta \rangle$ که $\mathbb{P}[\alpha] \in N_0$ و برای هر شرط $p \in \mathbb{P}[\alpha] \cap N_0$ شرط $p' \leq p$ را چنان می‌یابیم که:

$(*)^{\beta,\mathcal{N}}_{p'}$: برای هر $\zeta \leq \beta$

۱. اگر ζ اردینال تالی[1] باشد، آنگاه p' شرط به طور قوی $(N_\zeta, \mathbb{P}[\alpha])$ــ ژنریک است و

۲. اگر ζ اردینال حدی باشد، آنگاه p' شرط $(N_\zeta, \mathbb{P}[\alpha])$ــ ژنریک است.

همچنین نشان می‌دهیم برای هر αــ برج $\mathcal{N}$ با $\mathbb{P}[\alpha], \dot{C} \in N_0$، هیچ شرط $q \in \mathbb{P}[\alpha]$ نمی‌تواند $(\mathcal{N}, \mathbb{P}[\alpha])$-ژنریک باشد.

ابتدا با اثبات این حکم شروع خواهیم کرد که برای هر $\alpha > \beta$، $\mathbb{P}[\alpha]$ فورسینگ βــ سره است. اردینال $\alpha > \beta$ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $\mathcal{N} = \langle N_\zeta : \zeta \leq \beta \rangle$ βــ برج از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_0,\aleph_1}$ باشد با $\mathbb{P}[\alpha] \in N_0$. برای $p \in \mathbb{P}[\alpha] \cap N_0$ دلخواه، $p' = \langle \mathcal{M}_{p'}, f_{p'}, \mathcal{W}_{p'} \rangle$ را چنان در نظر بگیرید که:

۱. $\mathcal{M}_{p'} = \mathcal{M}_p \cup \mathcal{N}$،

۲. برای هر $\xi \leq \gamma_p$، $f_{p'}(M^{p'}_\xi) = f_{p'}(M^p_\xi) = f_p(M^p_\xi)$،

۳. برای هر $\zeta \leq \beta$، $f_{p'}(M^{p'}_{\gamma_p+1+\zeta}) = f_{p'}(N_\zeta) = \delta_{N_\zeta} + 1$ و

۴. $\mathcal{W}_{p'} = \mathcal{W}_p \cup \{N_\zeta \in \mathcal{N} :$ اردینال حدی نباشد $\zeta\}$.

نشان خواهیم داد p' گواهی بر برقراری $(*)^{\beta\mathcal{N}}_{p'}$ است. با توجه به ساختن p'، $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{M}_{p'}$، $\mathcal{W}_p \subseteq \mathcal{W}_{p'}$ و برای هر $M \in \mathcal{M}_p$، $f_p(M) \subseteq f_{p'}(M)$. بنابراین $p' \leq p$. اماهنوز باید نشان دهیم $p' \in \mathbb{P}[\alpha]$.

[1] Successor Ordinal

لم ۴–۴–۵. *p' شرط فورسینگ است.*

اثبات. چون $p \in N_{\circ}$، پس $M_{\gamma_p} \in N_{\circ}$ و همچنین $f_p(M^p_{\gamma_p}) \in N_{\circ}$. چون $\mathcal{N}$ دنبالهٔ $\in$ـ صعودی و پیوسته از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_{\circ},\aleph_{1}}$ است و $M_{\gamma_p} \in N_{\circ}$، لذا $\mathcal{M}_{p'}$ دنبالهٔ $\in$ـ صعودی و پیوسته از اعضای $\mathcal{E}_{\aleph_{\circ},\aleph_{1}}$ از طول $\gamma_p + \beta$ است. از آنجا که α اردینال تجزیه‌ناپذیر است و γ_p و β کوچکتر از α هستند، طبق تعریف ۴–۲–۴، طول دنبالهٔ $\mathcal{M}_{p'}$ که حداکثر $\gamma_p + \beta$ است، از α کوچکتر است. همچنین چون $p \in N_{\circ}$، پس $f_{p'}(M_{\gamma_p}) \in N_{\circ}$، و چون برای هر $\zeta < \beta$، $N_\zeta \in N_{\zeta+1}$، به دست می‌آوریم $\delta_{N_\zeta} + 1 \in N_{\zeta+1}$. بنابراین برای هر $\zeta \neq \beta$ و هر $N_\zeta \in \mathcal{N}$، $f_{p'}(N_\zeta) \in N_{\zeta+1}$. لذا برای هر $\xi < \gamma_{p'}$،

$$f_{p'}(M^{p'}_{\xi}) \in M^{p'}_{\xi+1} \text{ و } f_{p'}(M_{\gamma_{p'}}) = f_{p'}(N_\beta) \in H_{\omega_1}.$$

اکنون کافی است نشان دهیم $\mathcal{W}_{p'}$ خواص لازم را دارد. از ساختن $\mathcal{W}_{p'}$ نتیجه می‌شود $\mathcal{W}_{p'} \subseteq \mathcal{M}_{p'}$. فرض کنید $Q \in \mathcal{W}_{p'}$. اگر $Q \in \mathcal{W}_p$، آنگاه چون $\mathcal{W}_p \in N_{\circ}$، پس $p' \restriction Q = p \restriction Q \in Q$. اگر $Q \in \mathcal{W}_{p'} \setminus \mathcal{W}_p$، آنگاه $Q = N_{\circ}$ یا برای $\zeta < \beta$، $Q = N_{\zeta+1}$. اگر $Q = N_{\circ}$، آنگاه $p' \restriction N_{\circ} = p \in N_{\circ}$ و حکم برقرار است. اگر $Q = N_{\zeta+1}$ برای $\zeta < \beta$، آنگاه $\mathcal{M}_{p'} \cap N_{\zeta+1}$ قسمت ابتدایی $\mathcal{M}_{p'}$ با بزرگترین عضو N_ζ است که به $N_{\zeta+1}$ تعلق دارد. همچنین برای هر $Q' \in \mathcal{M}_{p'} \cap N_{\zeta+1}$، $f_{p'}(Q') \in N_{\zeta+1}$ زیرا $\mathcal{M}_{p'}$ دنبالهٔ پیوستهٔ $\in$ـ صعودی از زیرساختارهای شماراست. در آخر چون $\mathcal{W}_p \in N_{\circ}$ و $\mathcal{N}$ دنبالهٔ پیوستهٔ $\in$ـ صعودی از زیرساختارهای شماراست، لذا $\mathcal{W}_{p'} \cap N_{\zeta+1} \in N_{\zeta+1}$. ■

در ادامه نشان می‌دهیم p' برای هر زیرساختار مقدماتی شمارا از βـ برج که اندیس تالی دارد، شرط به طور قوی ژنریک است.

لم ۴–۴–۶. *برای هر اردینال غیرحدی[1] $\zeta \leq \beta$، p' شرط به طور قوی $(N_\zeta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است.*

اثبات. برهان لم ۴–۴–۶ را در یک سری از ادعاها ارائه می‌کنیم. $\zeta \leq \beta$ را اردینال غیرحدی در نظر بگیرید.

[1] Non-limit Ordinal

ادعا ۴–۴–۷. اگر $q \leq p'$، آنگاه $q{\restriction}N_\zeta \in \mathbb{P}[\alpha] \cap N_\zeta$.

اثبات. طبق تعریف ۴–۴–۲، برای هر شرط q که p' را گسترش دهد، $N_\zeta \in \mathcal{W}_{p'} \subseteq \mathcal{W}_q$، که به ویژه نتیجه می‌دهد $q{\restriction}N_\zeta \in N_\zeta$.

ادعا ۴–۴–۸. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{P}[\alpha] \cap N_\zeta$ چگال باز و $r \in D$ گسترش $q{\restriction}N_\zeta$ است. فرض کنید $s = \langle \mathcal{M}_s, f_s, \mathcal{W}_s \rangle$ به صورت زیر باشد.

- $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_r \cup \mathcal{M}_q$
- $f_s{\restriction}\mathcal{M}_r = f_r$
- $f_s{\restriction}\mathcal{M}_q \setminus \mathcal{M}_r = f_q$
- $\mathcal{W}_s = \mathcal{W}_r \cup \mathcal{W}_q$

در این صورت s شرط فورسینگ است و r و q را گسترش می‌دهد.

اثبات. با توجه به ساختن، s گسترش مشترک r و q است. بنابراین کافی است نشان دهیم $s \in \mathbb{P}[\alpha]$. چون طول دنباله‌های $\mathcal{M}_r$ و $\mathcal{M}_q$ کمتر از اردینال تجزیه‌ناپذیر α است، پس طول $\mathcal{M}_s$ نیز(که حداکثر $\gamma_r + \gamma_q$ است) کمتر از α است. علاوه بر این، $\mathcal{M}_s$ دنبالهٔ پیوستهٔ $\in$ـ صعودی به صورت

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_r^\frown \langle N_\zeta \rangle^\frown \langle N \in \mathcal{M}_q : N_\zeta \in N \rangle = \langle M^r_۰, \dots, M^r_{\gamma_r}, N^q_\zeta, N^q_{\zeta+۱}, \dots, N^q_{\gamma_q} \rangle$$

است. توجه کنید $r \in N_\zeta$ نتیجه می‌دهد $\mathcal{M}_r \in N_\zeta$ و به ویژه

$$M^r_{\gamma_r} \in N_\zeta \text{ و } f_s(M^s_{\gamma_r}) = f_r(M^r_{\gamma_r}) \in N_\zeta.$$

از آنجا که $f_s(N_\zeta) = f_q(N_\zeta) \in N$ برای کوچکترین $N \in \mathcal{M}_q$ با $N_\zeta \in N$. بنابراین فوراً استنباط می‌شود برای هر $\xi < \gamma_s$،

$$f_s(M^s_\xi) \in M^s_{\xi+۱} \text{ و } f_s(M^s_{\gamma_s}) = f_q(N^q_{\gamma_q}) \in H_{\omega_۱}.$$

حالا فرض کنید $Q \in \mathcal{W}_s$. اگر $Q \in \mathcal{W}_r$، آنگاه $s{\restriction}Q = r{\restriction}Q \in Q$. اگر $Q \in \mathcal{W}_q \setminus \mathcal{W}_r$، آنگاه

$$s{\restriction}Q = s{\restriction}N_\zeta \cup s{\restriction}(N_\zeta, Q) = r \cup q{\restriction}(N_\zeta, Q) = r \cup q{\restriction}Q.$$

از آنجا که $r \in N_\zeta \subseteq Q$، پس $r \in Q$. چون $Q \in \mathcal{W}_q$، لذا $q{\restriction}Q \in Q$. بنابراین $s{\restriction}Q = r \cup q{\restriction}Q \in Q$.

بنابراین p' شرط به طور قوی $(N_\zeta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است و برهان لم ۴–۴–۶ کامل می‌گردد. ■

در قضیهٔ ۲–۳–۹ نشان دادیم برای N و $\mathbb{P}$ داده شده، هر شرط به طور قوی $(N, \mathbb{P})$ـ ژنریک، شرطی $(N, \mathbb{P})$ـ ژنریک است. اکنون در لم ۴–۴–۹ نشان می‌دهیم خاصیت ژنریک بودن شرط‌ها، برای ساختارهایی از برج که اندیس آن‌ها اردینال‌های حدی است، حفظ می‌شود.

لم ۴–۴–۹. *فرض کنید $\zeta \leq \beta$ اردینال حدی باشد و برای هر اردینال η کوچکتر از ζ، p' $(N_\eta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک باشد. در این صورت p' $(N_\zeta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است.*

اثبات. گیریم $\dot\tau \in N_\zeta$، $\mathbb{P}[\alpha]$ـ ترم اردینال باشد. از آنجا که $N_\zeta = \bigcup\limits_{\eta<\zeta} N_\eta$، پس $\eta < \zeta$ وجود دارد به طوری که $\dot\tau \in N_\eta$. با توجه به فرض و با استفاده از لم ۲–۳–۴ نتیجه می‌گیریم

$$p' \Vdash \text{“}N_\eta \cap \mathrm{ON} = N_\eta[\dot G] \cap \mathrm{ON}\text{”}.$$

بنابراین $p' \Vdash \text{“}\dot\tau \in N_\eta\text{”}$، و در نتیجه $p' \Vdash \text{“}\dot\tau \in N_\zeta\text{”}$. از آنجا که $\dot\tau$ دلخواه است، با استفاده مجدد از لم ۲–۳–۴، نتیجه می‌گیریم p' $(N_\zeta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است. ■

لم ۴–۴–۱۰. *$\mathbb{P}[\alpha]$، αـ سره نیست.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{N} = \langle N_\zeta : \zeta \leq \alpha \rangle$ αـ برج دلخواه باشد به طوری که $\mathbb{P}[\alpha], \dot C \in N_\circ$. همانند قبل، $\dot C$ $\mathbb{P}[\alpha]$ـ ترم طبیعی مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران C تعریف شده در لم ۴–۴–۳ است که با فورسینگ توسط $\mathbb{P}[\alpha]$ الحاق می‌شود. گیریم $p \in \mathbb{P}[\alpha] \cap N_\circ$. با برهان خلف فرض کنید $q \leq p$ شرط $(\mathcal{N}, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک باشد. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $\delta_{N_\alpha} < \delta_{M^q_{\gamma_q}}$. برای هر $\zeta \leq \alpha$ چون $\dot C \in N_\zeta$ و q شرط $(N_\zeta, \mathbb{P}[\alpha])$ـ ژنریک است، q اجبار می‌کند $\dot C \cap \delta_{N_\zeta}$ در δ_{N_ζ} بی‌کران باشد. بنابراین $q \Vdash \text{“}\delta_{N_\zeta} \in \dot C\text{”}$. چون α اردینال تجزیه‌ناپذیر است و دنبالهٔ $\mathcal{M}_q$ از طول کمتر از α است، پس می‌توانیم اردینال $\zeta < \alpha$ را چنان بیابیم که

$$\{\delta_M : M \in \mathcal{M}_q\} \cap [\delta_{N_\zeta}, \delta_{N_{\zeta+۲}}) = \emptyset.$$

گیریم $\eta < \gamma_q$ بزرگترین اردینال باشد به طوری که $\delta_{M^q_\eta} < \delta_{N_\zeta}$. بنابراین $\delta_{M^q_{\eta+1}} \geq \delta_{N_{\zeta+2}}$. از آنجا که $q \Vdash$ "$\delta_{N_\zeta} \in \dot{C}$"، لذا ساختاری مانند $\tilde{M}$ وجود دارد به طوری که:

۱. $\tilde{M} \in M^q_{\eta+1}$،

۲. $M^q_\eta \in \tilde{M}$ و

۳. $\delta_{\tilde{M}} = \delta_{N_\zeta}$.

گیریم r چنان باشد که:

- $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_q \cup \{\tilde{M}\}$،
- برای هر $M \in \mathcal{M}_q$، $f_r(M) = f_q(M)$
- $f_r(\tilde{M}) = \{\delta_{N_{\zeta+1}} + 1\}$ و
- $\mathcal{W}_r = \mathcal{W}_q$.

در این صورت r شرط فورسینگ است. توجه به این نکته کافی است که برای هر $N \in \mathcal{W}_r$ اگر $\tilde{M} \in N$، آنگاه $\delta_{N_{\zeta+1}} + 1 \in N$ چون $\delta_{N_{\zeta+1}} + 1 < \delta_{N_{\zeta+2}} \leq \delta_N$. همچنین r گسترش q است. بنابراین

$$r \Vdash \text{“}\delta_{N_{\zeta+1}} \notin \dot{C}\text{”}$$

که تناقض است. ■

کتاب‌نامه

[1] Abraham, U. and Shelah, S. Forcing closed unbounded sets. *The Journal of Symbolic Logic*, 48(3):643–657, 1983.

[2] Abraham, Uri. Proper forcing. In *Handbook of Set Theory*, pages 333–394. Springer, 2009.

[3] Baumgartner, J. E., Harrington, L. A., and Kleinberg, E. M. Adding a closed unbounded set. *The Journal of Symbolic Logic*, 41(2):481–482, 1976.

[4] Baumgartner, James E. Iterated forcing. In *Surveys in Set Theory*, pages 1–59. Cambridge University Press, 1983.

[5] Cohen, P. J. The independence of the continuum hypothesis, I. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 50:1143–1148, 1963.

[6] Cohen, P. J. The independence of the continuum hypothesis, II. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 51:105–110, 1964.

[7] Cohen, P. J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. W. A. Benjamin, New York, NY, USA, 1966.

[8] Foreman, Matthew and Kanamori, Akihiro. *Handbook of Set Theory*. Springer Netherlands, Germany, 2010.

[9] Friedman, Sy-David. Forcing with finite conditions. In Bagaria, Joan and Todorčević, Stevo, editors, *Set Theory: Centre de Recerca Matemàtica Barcelona, 2003–2004*, pages 285–295, Basel, 2006. Birkhäuser Basel.

[10] Gödel, K. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications, 1992.

[11] Hoseini Naveh, R. and Golshani, M. Adding Abraham clubs and α-properness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, submitted, 2024.

[12] Hoseini Naveh, R., Golshani, M., and Eslami, E. Adding highly generic subsets of ω_2. *Mathematical Logic Quarterly*, 70(1):126–133, 2024.

[13] Jech, T. *Set Theory*. ISSN. Elsevier Science, 1978.

[14] Jech, T. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[15] Kanamori, Akihiro. Cohen and set theory. *Bulletin of Symbolic Logic*, 14(3):351–378, 2008.

[16] Kirby, J. *An Invitation to Model Theory*. Cambridge University Press, 2019.

[17] Koszmider, Piotr. Models as side conditions. In *Set Theory*, pages 99–107. Springer, Dordrecht, 1998.

[18] Kunen, K. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1983.

[19] Kunen, K. *Set Theory*. Studies in logic. College Publications, 2011.

[20] Kuzeljevic, B. and Todorčević, S. Forcing with matrices of countable elementary submodels. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145(5):2211–2222, 2017.

[21] Mitchell, W. J. Adding closed unbounded subsets of ω_2 with finite forcing. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 46(3):357–371, 2005.

[22] Mitchell, W. J. $I[\omega_2]$ can be the nonstationary ideal on $\mathrm{cof}(\omega_1)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(2):561–601, 2009.

[23] Neeman, I. Forcing with sequences of models of two types. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 55(2):265 – 298, 2014.

[24] Rautenberg, W. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[25] Shelah, S. Independence results. *Journal of Symbolic Logic*, 45(3):563–573, 1980.

[26] Shelah, S. *Proper and Improper Forcing*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2017.

[27] Solovay, R. M. A model of set-theory in which every set of reals is lebesgue measurable. *Annals of Mathematics*, 92(1):1–56, 1970.

[28] Solovay, R. M. and Tennenbaum, S. Iterated cohen extensions and souslin's problem. *Annals of Mathematics*, 94(2):201–245, 1971.

[29] Todorčević, Stevo. A note on the proper forcing axiom. In *Axiomatic set theory*, Contemp. Math., 31, pages 209–218, Providence, RI, 1984. Amer. Math. Soc.

[30] Todorčević, Stevo. Directed sets and cofinal types. *Transactions of the American Mathematical Society*, 290(2):711–723, 1985.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اجبار	Force
اردینال تالی	Successor Ordinal
اردینال حدی	Limit Ordinal
اردینال غیرحدی	Non-limit Ordinal
اصل انتخاب	Axiom of Choice
اصل مجموعه توانی	Axiom of powerset
انعکاسی	Reflexive
بدون اتم	Atom less
برج	Tower
بستار متعدی	Transitive Closure
پادزنجیر	Antichain
پایا	Stationary
پیش‌چگال	Pre-dense
پیوسته	Continuous
تابع جزئی	Partial Function
تجزیه‌ناپذیر	Indecomposable
ترتیب جزئی	Partial Order
تعریف‌پذیری	Definability
جداسازی	Separation
ادغام	Amalgamation
چگال	Dense

Countable Support	حمایت شمارا
Finite Support	حمایت متناهی
well-ordering	خوش‌ترتیبی
Chain	زنجیر
Elementary Substructure	زیرساختار مقدماتی
Genericitiy	ژنریک بودن
Structure	ساختار
Condition	شرط
Side Condition	شرط جانبی
Generic Object	شی ژنریک
Canonical	طبیعی
Reverse Inclusion	شمول عکس
Highly Generic	فراژنریک
Continuum Hypothesis	فرضیه پیوستار
Generalized Continuum Hypothesis	فرضیه پیوستار تعمیم‌یافته
Suslin’s Hypothesis	فرضیه سوسلین
Collapse	فروریزی
Strongly Proper Forcing	فورسینگ به طور قوی سره
Proper Forcing	فورسینگ سره
Iterated Forcing	فورسینگ مکرر
Generic filter	فیلتر ژنریک
Initial Segment	قسمت ابتدایی
Completeness Theorem	قضیه تمامیت
Inaccessible Cardinal	کاردینال غیرقابل دسترس

کاردینال منتظم	Regular Cardinal
کپی‌های یکریختی	Isomorphic Copy
گسترش	Extension
گسترش مشترک	Common Extension
متعدی	Transitive
مجموعه بستهٔ بی‌کران	Closed Unbounded Set
مدل	Model
مدل زمینه	Ground Model
مسیر	Path
مفهوم فورسینگ	Forcing Notion
منفرد	Singular
ناپایا	Nonstationary
نقطه حدی	Limit Point

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Amalgamation .... ادغام
Antichain .... پادزنجیر
Atom less .... بدون اتم
Axiom of Choice .... اصل انتخاب
Axiom of powerset .... اصل مجموعه توانی
Canonical .... طبیعی
Chain .... زنجیر
Closed Unbounded Set .... مجموعه بستهٔ بی‌کران
Collapse .... فروریزی
Common Extension .... گسترش مشترک
Completeness Theorem .... قضیه تمامیت
Condition .... شرط
Continuum Hypothesis .... فرضیه پیوستار
Continuous .... پیوسته
Countable Support .... حمایت شمارا
Definability .... تعریف‌پذیری
Dense .... چگال
Elementary Substructure .... زیرساختار مقدماتی
Extension .... گسترش
Finite Support .... حمایت متناهی
Force .... اجبار

Forcing Notion .... مفهوم فورسینگ

Generalized Continuum Hypothesis .... فرضیه پیوستار تعمیم‌یافته

Generic filter .... فیلتر ژنریک

Generic Object .... شی ژنریک

Genericitiy .... ژنریک بودن

Ground Model .... مدل زمینه

Highly Generic .... فراژنریک

Inaccessible Cardinal .... کاردینال غیرقابل دسترس

Indecomposable .... تجزیه‌ناپذیر

Initial Segment .... قسمت ابتدایی

Isomorphic .... یکریخت

Isomorphic Copy .... کپی‌های یکریختی

Iterated Forcing .... فورسینگ مکرر

Limit Ordinal .... اردینال حدی

Limit Point .... نقطه حدی

Model .... مدل

Nonlimit Ordinal .... اردینال غیرحدی

Nonstationary .... ناپایا

Partial Function .... تابع جزئی

Partial Order .... ترتیب جزئی

Path .... مسیر

Pre-dense .... پیش‌چگال

Proper Forcing .... فورسینگ سره

Reflexive .... انعکاسی

Regular Cardinal .... کاردینال منتظم

Reverse Inclusion .... شمول عکس

Separation .... جداسازی

Side Condition .... شرط جانبی

Singular .... منفرد

Stationary .... پایا

Strongly Proper Forcing .... فورسینگ به طور قوی سره

Structure .... ساختار

Successor Ordinal .... اردینال تالی

Suslin's Hypothesis .... فرضیه سوسلین

Tower .... برج

Transitive .... متعدی

Transitive Closure .... بستار متعدی

well-ordering .... خوش‌ترتیبی

Abstract

In this thesis, using forcing with elementary substructures, we first address a question posed by Gitik, regarding the preservation of cardinals and the Generalized Continuum Hypothesis (GCH), in the specific case of $\kappa = \aleph_2$. We introduce a forcing notion that preserves cardinals and the GCH, while adding highly generic subsets of ω_2. Then, we introduce a generalization of Abraham's forcing for adding closed unbounded subsets of ω_1, which is proper but not ω-proper. Subsequently, by introducing a forcing notion that adds Abraham's club in ω_1 and is $< \alpha$-proper for any indecomposable ordinal α, but not α-proper, we provide a new proof for a theorem of Shelah.

Keywords: Forcing with side conditions, elementary substructures, two types side conditions.

Shahid Bahonar University of Kerman
Faculty of Mathematics and Computer
Department of Pure Mathematics

Forcing with elementary substructures

Prepared by:

Rouholah Hoseininaveh

First Supervisor:

Dr. Esfandiar Eslami

Second Supervisor:

Dr. Mohammad Golshani

A Thesis Submitted as a Partial Fulfillment of the Requirements for the PhD Degree in Mathematics

July 2024